DOI 10.37882/2223-2966.2023.09.28

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРУНТА, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ИЗБЫТОЧНЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ ПОРОВЫЕ ДАВЛЕНИЯ

IMPLEMENTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR A KINEMATIC SOIL MODEL DESCRIBING EXCESSIVE RESIDUAL PORE PRESSURES

T. Saltanova

Summary. The paper uses a new model of the stress-strain state of a two-phase body (soil skeleton + pore water) in a stabilized state, independent of time. A modification of the finite element method was developed for it, and the results of numerical simulation were shown on a Flaman-type problem. The results of numerical calculations are compared with the analytical solution.

Keywords: modeling of a two-phase water-saturated base, excess residual pore pressures, Lame-type equations, finite element method.

Салтанова Татьяна Викторовна
Доцент, Тюменский государственный университет
tsaltanova@mail.ru

Аннотация. В работе использована новая модель напряжённо–деформированного состояния двухфазного тела (скелет грунта + поровая вода) в стабилизированном состоянии, независящем от времени. Для неё разработана модификация метода конечных элементов и на задаче типа Фламана показаны результаты численного моделирования. Результаты численных расчётов сопоставлены с аналитическим решением.

Ключевые слова: моделирование двухфазного водонасыщенного основания, избыточные остаточные поровые давления, уравнения типа Ламе, метод конечных элементов.

Рассмотрим модель напряжённо–деформированного состояния двухфазного тела (скелет грунта + поровая вода) в стабилизированном состоянии, независящем от времени, представляющую собой систему дифференциальных уравнений, относительно вектора перемещений частиц твёрдой фазы $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2)$ [1]:

$$-\left(\left((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + G\Delta u_i + b_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + c_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right) = F_i, \quad (1)$$

$$i = 1,2,$$

$$G = \frac{E_s}{2(1+v)},\ \lambda = \frac{E_s v}{(1+v)(1-2v)},$$

$$b_i = \frac{E_{li}}{\aleph_i^2},\ c_i = \frac{E_{li}}{\aleph_i h_i},\ \theta = div\,\boldsymbol{u}$$

с неоднородными смешанными граничными условиями

$$\boldsymbol{u}|_{S_1} = 0,\ \boldsymbol{t}^{(v)}|_{S_2} = \boldsymbol{Q}.$$

В отличие от уравнений Ламе каждое уравнение системы (1) содержит дополнительные слагаемые в виде производных второго и первого порядков, отражающие влияние жидкой фазы на твёрдую.

Положительные коэффициенты G, λ, b_i, c_i, отражают механические свойства среды. v, E_s, E_{li} — механические характеристики твёрдой (индекс s) и жидкой (индекс l) фаз. $\aleph_i$— безразмерная величина $(0 < \aleph_i < 1)$,, показывающая долю перемещения твёрдой частицы от соответствующего перемещения жидкой частицы. h_i — геометрические характеристики сжимаемой толщи, $t^{(v)}$— оператор, позволяющий записать напряжения через узловые перемещения. $\boldsymbol{Q} = (Q_1; Q_2)$ — заданный вектор внешних сил, приложенных к дренирующей дневной поверхности тела S_2, вектор $\boldsymbol{v}$ — нормаль к поверхности.

Модификация метода конечных элементов

Перепишем систему уравнений (1) в операторном виде и скалярно умножим уравнение на вектор возможных перемещений v:

$$-((A+B+C)u,v) = (F,v), \quad (2)$$

где $A = (G+\lambda)grad\,div + G\Delta$— оператор Ляме, операторы $B\left(b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, b_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$, $C\left(c_1\frac{\partial}{\partial x_1}, c_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ описывают влияние жидкой фазы.

Отрицательные операторы A, B, C являются положительно определёнными [2]. В работе [2] также установлена связь между скалярными произведениями и полной энергии деформации, которая представляет собой сумму трёх слагаемых W^A, W^B, W^C, где

$$2W^A = c(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + 2\lambda\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(c-\lambda)\varepsilon_{12}^2 =$$

$$= \varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2 + \gamma_{12}\tau_{12},\ c = \frac{(1-v)E_s}{(1+v)(1-2v)},$$

$$2W^B = b_1\varepsilon_1^2 + b_2\varepsilon_2^2.$$

В сумме $2W^A + 2W^B$ можно сгруппировать слагаемые и вынести за скобки общие множители ε_1 и ε_2,

$$2W^A + 2W^B = \varepsilon_1(\sigma_1 + b_1\varepsilon_1) + \varepsilon_2(\sigma_2 + b_2\varepsilon_2) + \gamma_{12}\tau_{12},$$

Слагаемые $\sigma_1 + b_1\varepsilon_1$ и $\sigma_2 + b_2\varepsilon_2$ представим следующим образом:

$$\sigma_1 + b_1\varepsilon_1 = c\varepsilon_1 + a_1\varepsilon_2 + b_1\varepsilon_1 = (c + b_1)\varepsilon_1 + a_1\varepsilon_2,$$

$$\sigma_2 + b_2\varepsilon_2 = a_1\varepsilon_1 + (c + b_2)\varepsilon_2,$$

где $a_1 = \dfrac{Ev}{(1+v)(1-2v)}$,

что приводит к новой редакции закона Гука для скелета грунта.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(1-v)E_s}{(1+v)(1-2v)} + \dfrac{E_{l1}}{\aleph_1^2} & \dfrac{vE_s}{(1+v)(1-2v)} & 0 \\ \dfrac{vE_s}{(1+v)(1-2v)} & \dfrac{(1-v)E_s}{(1+v)(1-2v)} + \dfrac{E_{l2}}{\aleph_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E_s}{2(1+v)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

Возникающие за счёт оператора B слагаемые $E_{li} / \aleph_i^2$ описывают изменения механических характеристик скелета грунта за счёт поровой воды.

Фигурными скобками обозначен вектор — столбец, квадратными скобками — полная матрица.

Искомыми величинами являются узловые перемещения $\{\delta\}$, поэтому перемещения u_k и другие характеристики внутри элемента записываются через искомые узловые перемещения:

$$u_k = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} (p_i + d_i x_1 + n_i x_2)u_k^i + \\ +(p_j + d_j x_1 + n_j x_2)u_k^j + \\ +(p_m + d_m x_1 + n_m x_2)u_k^m \end{bmatrix}, \; k = 1,\, 2 \qquad (4)$$

$$p_i = x_1^j x_2^m - x_1^m x_2^j,\; n_i = x_1^m - x_2^j,\; d_i = x_2^j - x_2^m.$$

На основании уравнений Коши:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2\Delta}\left(d_i u_1^i + d_j u_1^j + d_m u_1^m\right),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2\Delta}\left(n_i u_2^i + n_j u_2^j + n_m u_2^m\right),$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta}\left(n_i u_1^i + n_j u_1^j + n_m u_1^m + d_i u_2^i + d_j u_2^j + d_m u_2^m\right)$$

относительные деформации внутри конечного элемента площадью Δ выражаются через искомые узловые перемещения $\{\delta\}$:

$$\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\},$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix}.$$

Для составления системы линейных алгебраических уравнений используем первые два слагаемые выражения (2) $(-(A + B)u, v)$. Пусть вектор v описывает возможные узловые перемещения $\{\delta^*\}$. Допустим, что возможные перемещения совпадают с искомыми перемещениями $\{\delta\}$.

Запишем работу внешних сил $\{\delta\}^T[F]$ через удельную работу внутренних сил

$$2(W^A + W^B) = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\},\; \{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T[N]^T,$$

отвечающих скелету грунта.

От удельной работы перейдём к работе внутренних сил в пределах объёма элемента единичной толщины.

$$\int_S \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot 1dS = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot\Delta\cdot 1,$$

$$\int_S dS = \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix},$$

Уравнение равенства работ внешних и внутренних сил запишем с помощью матриц: $\Delta\cdot\{\delta\}^T[N]^T\{\sigma\} = \{\delta\}^T\{F\}$. Сократим на $\{\delta\}^T$. Тогда выражение $-((A + B)u, u) = (F, u)$ получит матричную запись:

$$\Delta\cdot[N]^T[D]\cdot[N]\{\delta\} = \{F\}.$$

Произведение

$$\Delta\cdot[N]^T[D]\cdot[N] = [k_s] \qquad (6)$$

называют матрицей жёсткости для скелета грунта.

Скалярное произведение, соответствующее третьему оператору, имеет вид [2]:

$$(-Cu,u) = \int_S \left(\frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_2 \right) dS = \int_S P_l \cdot u dS,$$

$$\{P_l\} = \left(\frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1}\varepsilon_1 \;\; \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2}\varepsilon_2 \right).$$

После аналогичных преобразований которого имеем:

$$(-Cu,u) = \{\delta\}^T [M]^T \{P_l\}^T \Delta. \tag{7}$$

Добьемся одинаковой размерности $[M]^T$ с матрицей $[N]^T$ добавив нулевой столбец.

$$[N]^T = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} d_i & 0 & n_i \\ 0 & n_i & d_i \\ d_j & 0 & n_j \\ 0 & n_j & d_j \\ d_m & 0 & n_m \\ 0 & n_m & d_m \end{pmatrix}$$

$$[M]^T = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} f_i & 0 & 0 \\ 0 & f_i & 0 \\ f_j & 0 & 0 \\ 0 & f_j & 0 \\ f_m & 0 & 0 \\ 0 & f_m & 0 \end{pmatrix},$$

$f_k = p_k + d_k x_c + n_k x_c$, x_c — центр тяжести треугольного элемента.

Аналогичным образом поступим с матрицей $\{P_l\}^T$.

$$\{P_l\}^T = \begin{pmatrix} \frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1}\varepsilon_1 \\ \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2}\varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = [D_l]\{\varepsilon_s\}.$$

После подстановки полученных выражений в (7) получаем матрицу жёсткости для поровой воды:

$$[M]^T [D_l] \cdot [N]\Delta = [k_l]. \tag{8}$$

Поскольку матричный сомножитель $[N]$ в матрице $[k_l]$ сохраняется, то новое матричное слагаемое $[M]^T[D_l]$ надо сложить с известной для скелета грунта матрицей $[N]^T[D]$, что приведёт к новой матрице жёсткости для двухфазного треугольного элемента

$$[k_{sl}] = \left([N]^T[D] + [M]^T[D_l]\right) \cdot [N] \cdot \Delta.$$

Численные эксперименты

Приведём результаты решения задачи типа Фламана о загружении двухфазной полуплоскости. В работе получена аналитическая формула для этой задачи, которая позволит проверить точность аппроксимации данного метода. Построим графики вертикальных перемещений для $x_1 = 0$.

Аналитическое решение задачи имеет вид:

$$u_r = \frac{2F \cdot \cos\theta}{\pi \cdot \left(E_s + \frac{E_l}{\aleph^2}\right)} \cdot e^{-a^2 r} \cdot \left[\ln\frac{R}{r} - \int_\rho^r \frac{e^{-a^2 r} - 1}{a^2 r} d(a^2 r) \right]$$

$$a^2 = \frac{E_l}{\left(E_s + \frac{E_l}{\aleph^2}\right) \cdot \aleph \cdot h}$$

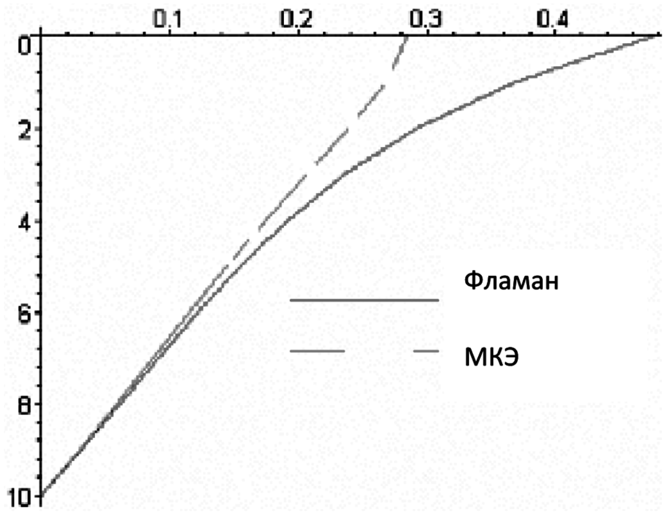

Рис. 1. Вертикальные перемещения $x_1 = 0$. Прямоугольник 10*10 (м) сторона 1 м

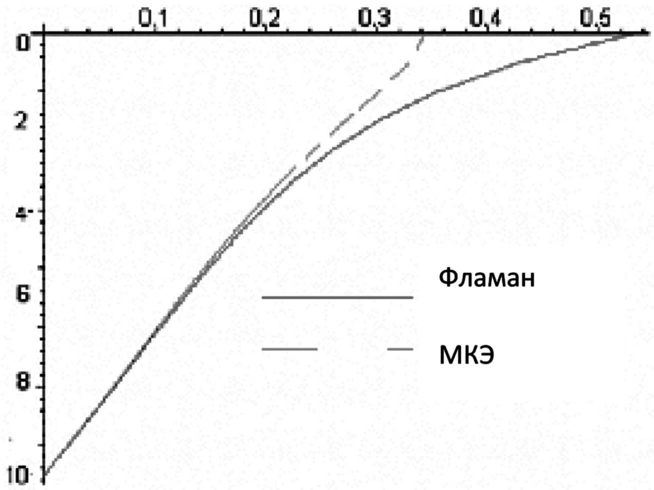

Рис. 2. Вертикальные перемещения $x_1 = 0$. Прямоугольник 10*10 (м) сторона 0,7 м

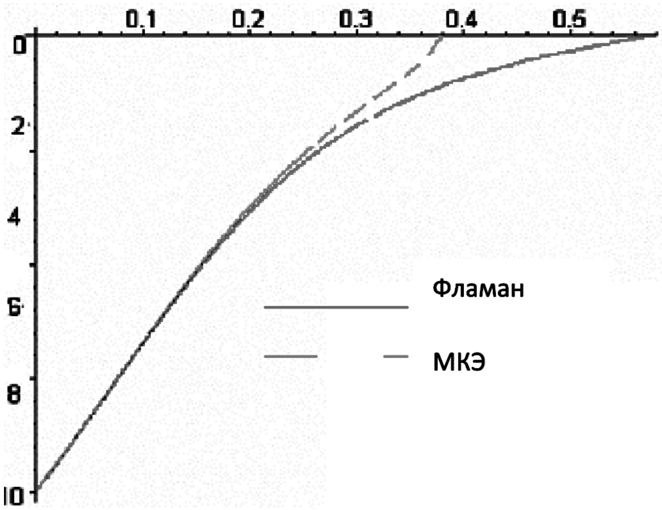

Рис. 3. Вертикальные перемещения $x_1 = 0$.
Прямоугольник 10*10 (м) сторона 0,1 м

Приведём графики для осадок в сравнении с аналитическим решением:

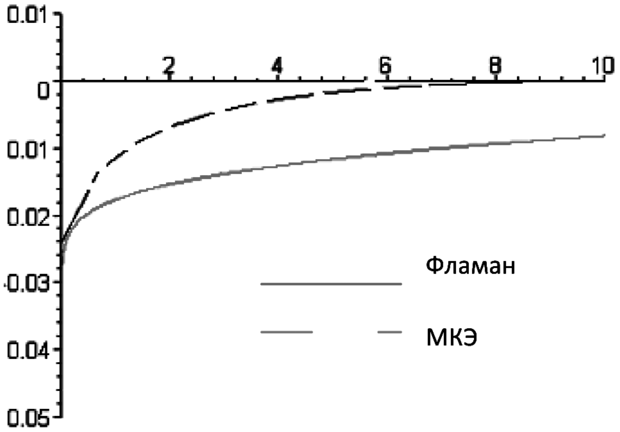

Рис. 4. Осадки для сетки 10*10 (м) со стороной 1 м

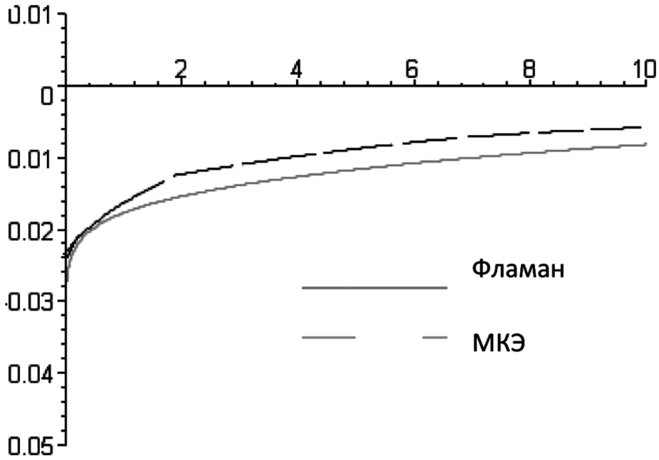

Рис. 5. Осадки для сетки 10*10 (м) со стороной 0,1 м

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцева Т.В. Введение функционала для решения обобщённой системы уравнений Ляме// Вестник ТюмГУ. — 2003. — №5. С. 196–201
2. Мальцев Л.Е., Мальцева Т.В., Салтанова Т.В. Анализ обобщённого оператора Ламе и отвечающий оператору конечный элемент// Проблемы прочности и пластичности. — 2006. — Выпуск 68. Нижний Новгород: НГУ. С. 181–189
3. Мальцев Л.Е., Бай В.Ф., Мальцева Т.В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. — 320 с.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»