DOI 10.37882/2223–2966.2023.01.17

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕМЕЙСТВ ТОЧЕК В ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТЕПЕНИ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ СИМПЛЕКСА

ON ONE METHOD OF INVESTIGATING FAMILIES OF POINTS IN THE PROBLEM OF CALCULATING THE DEGREE OF NON-DEGENERACY OF A SIMPLEX

A. Igumnov

Summary. The degree of non-degeneracy of a simplex (tetrahedron) in is understood as a quantitative quantity that characterizes its difference from a degenerate one (if the simplex in question is degenerate, then this difference is zero). One of the ways to calculate the degree of non-degeneracy

it consists in considering the vertices of the simplex as a numbered set of points.

By introducing a metric on the set of such sets defined by all possible simplices (with the same number of vertices), the degree of non-degeneracy can be considered as the distance from to the set of sets defined by degenerate simplices. The task is reduced to the study of the set in order to identify in it the families closest to.

The previously proposed research scheme boils down to splitting the set into parts and examining each of them based on the empirical classification of elements of families of the set. The use of this classification leads to a significant amount of calculations already in the simplest case.

In this paper, a different, uniform classification of the elements of the families of the set is proposed. As an example, a new study of families in the case is carried out and a finite class of families sufficient to calculate the desired characteristic is presented. The results of the article can be used both for theoretical and practical application in the tasks of determining the quality of the grid, preserving the properties of the grid with a certain type of mapping, grid generation tasks.

Keywords: non-degeneracy of the simplex, triangular grids, grid quality.

Игумнов Александр Юрьевич
Кандидат физико-математических наук, Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, г. Волжский
IAJu1965@mail.ru

Аннотация. Под степенью невырожденности симплекса (тетраэдра) в R^n понимается количественная величина, характеризующая отличие его от вырожденного (если рассматриваемый симплекс вырожден, то это отличие нулевое). Один из способов подсчета степени невырожденности заключается в рассмотрении вершин симплекса как нумерованного набора точек X.

Введя метрику на множестве таких наборов, определенных всевозможными симплексами (с одинаковым количеством вершин), степень невырожденности можно рассматривать как расстояние от X до множества z наборов, определяемыми вырожденными симплексами. Задача сводится к исследованию множества z на предмет выявления в нем семейств, ближайших к X.

Предложенная ранее схема исследования сводится к разбиению множества z на части и исследованию каждой из них на основании эмпирической классификации элементов семейств множества z. Использование этой классификации приводит к значительному объему выкладок уже в случае R^2 — самом простом.

В данной работе предлагается иная, единообразная классификация элементов семейств множества $\mathcal{Z}$. В качестве примера проведено заново исследование семейств в случае R^2 и предъявлен конечный класс семейств, достаточный для вычисления искомой характеристики. Результаты статьи могут служить как для теоретического, так и для практического применения в задачах определения качества сетки, сохранения свойств сетки при определенного вида отображениях, задачах генерации сетки.

Ключевые слова: невырожденность симплекса, треугольные сетки, качество сетки.

Введение

Вопросам получения числовых характеристик сеток посвящено большое количество работ. С некоторыми конкретными примерами можно ознакомиться по работам [1, 3, 5]. Классическим результатом в области определения условий гарантирующих сохранение свойств сетки является теорема Альфорса о сохранении ориентации треугольника при квазиконформном отображении [1]. Из относительно недавних работ в указанной области укажем [4, 6, 7].

В работе [9] было введено понятие k-точечных семейств (пронумерованных наборов k точек в R^n) и показано, что на них можно задать метрику (далее — ρ-расстояние). Там же приведено в явном виде выражение для ρ-расстояния от заданного треугольника до множества вырожденных треугольников (функция длин сторон треугольника) и показано, что равносторонний треугольник является, в сравнении с другими, наиболее отдаленным от множества вырожденных треугольников. В работе [10], как пример применения понятия ρ-расстояния было получено достаточное условие сохранения ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении.

В данной работе пересматриваются доказательства результатов работы [10], относящиеся к способу вычисления расстояния от данного семейства (треугольника) до множества вырожденных семейств (треугольников), с целью уменьшить объем выкладок в доказательствах. Причиной большого объема является неудачная эмпирическая классификация взаимного расположения отрезков и точек семейства, что хорошо видно по громоздкости доказательств аналогичных теорем для 4-точечных семейств (см. [11]). В основе пересмотра лежит предлагаемая простая и единообразная (по числу точек семейства) классификация взаимного расположения элементов семейства (позиции точек).

Семейства точек

Следуя [9] приведем основные понятия и определения. Семейством k точек в R^n или k-точечным семейством будем называть отображение $F: I \to \mathrm{R}^n$, где $I = \{1, \dots, k\}$ — отрезок натуральных чисел. Табличное задание отображения F будем записывать как

$$F = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & & k \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(k) \end{smallmatrix} \right\}.$$

Значения $F(i)$ будем называть точками семейства. Для k-точечных семейств F, G зададим набор чисел $\mathcal{A}(F,G)$ как набор отношений расстояний между одинаково нумерованными парами точек семейств F, G за исключением отношений вида

$\frac{0}{0}$:

$$\mathcal{A}(F,G) = \{\tfrac{|F(i)F(j)|}{|G(i)G(j)|},\ (i,j):\ 1 \le i < j \le k,$$

$$|F(i)F(j)| + |G(i)G(j)| > 0\}$$

(здесь $|\dots|$ — евклидова длина отрезка); и определим величину ρ следующим образом:

$\rho(F,G) = 0$ если для всех $i, j\, |F(i)F(j)| = 0$

и $|G(i)G(j)| = 0$

$\rho(F,G) = \log \frac{\max \mathcal{A}(F,G)}{\min \mathcal{A}(F,G)}$, иначе,

зафиксировав в качестве основания логарифма некоторое число, большее единицы, и полагая

$$\frac{a}{0} = +\infty, \log(+\infty) = +\infty.$$

Величина ρ инвариантна относительно ортогональных преобразований пространства R^n (т.е. для ортогональных преобразований $O', O'' : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ имеем $\rho(O' \circ F, O'' \circ G) = \rho(F,G)$) и является расстоянием между классами ортогонально эквивалентных (т.е. совмещаемых ортогональными преобразованиями) семейств, представителями которых являются семейства F, G. Далее величину $\rho(F,G)$ будем называть расстоянием (а также ρ-расстоянием) между семействами F, G. Величина ρ есть евклидова длина отрезка

$[\min \mathcal{A}(F,G), \max \mathcal{A}(F,G)]$, отложенного на логарифмической шкале (полагая $\log 0 = -\infty$).

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторое множество k-точечных семейств. Расстояние от k-точечного семейства F до множества $\mathcal{U}$ определим стандартным образом: $\rho(F,\mathcal{U}) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \rho(F,U)$. Связь между треугольниками и трехточечными семействами следующая. Всякое семейство определяет треугольник, вершинами которого являются точки семейства. Всякому треугольнику соответствует 3! семейств, каждое из которых определяется некоторой нумерацией его вершин. В качестве меры невырожденности треугольника полагается ρ -расстояние от семейства, определяемого некоторой нумерацией его вершин, до множества семейств, каждое из которых определяет вырожденный треугольник (т.е. все значения семейства лежат на одной прямой).

Общая схема исследования

Следуя [9] дадим общее описание схемы исследования некоторого множества семейств точек на предмет вычисления расстояния от некоторого заданного семейства до этого множества.

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое множество семейств вида $Z: I \to \mathrm{R}^n$. Всякое семейство $X: I \to \mathrm{R}^n$ такое, что $X(i) \ne X(j)$ при $i \ne j$, задает разбиение множества $\mathcal{Z}$ на подмножества $\mathcal{Z}_p^q(X)$ (некоторые из них могут быть пустыми), определяемые следующим образом: $Z \in \mathcal{Z}_p^q(X)$ тогда и только тогда когда в наборе $\mathcal{A}(X,Z)$ имеется ровно p минимальных значений и ровно q максимальных. Тогда, очевидно, $\rho(X,\mathcal{Z}) = \min \rho(X, \mathcal{Z}_p^q(X))$, где минимум берется по всем допустимым сочетаниям значений p и q. Далее каждое из множеств $\mathcal{Z}_p^q(X)$ исследуется на предмет выявления в нем семейств, заведомо не являющихся ближайшими к семейству X. Обозначив множество,

Рис. 1. Невозможная конфигурация

составляемое такими семействами, как $\mathcal{Z}'$ (сразу для всех p, q), имеем: $\rho(X, \mathcal{Z}) = \rho(X, \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}')$. При благоприятных обстоятельствах (например, если множество $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}'$ конечно и количество его элементов практически приемлемо для подсчета расстояний от X до каждого из семейств этого множества) величина $\rho(X, \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}')$ может быть вычислена явно.

Принадлежность семейства Z множеству $\mathcal{Z}_p^q(X)$ может быть обозначена указанием отрезков $Z(i)Z(j)$ семейства, для которых величина $|Z(i)Z(j)|/|X(i)X(j)|$ минимальна (такие отрезки будем обозначать синим цветом), и отрезков, для которых величина $|Z(i)Z(j)|/|X(i)X(j)|$ максимальна (такие отрезки будем обозначать красным цветом). Остальные отрезки и, соответственно, точки будем изображать черными или никак не изображать. Величину ρ будем изображать на логарифмической шкале, указывая синими точками минимальные величины $|Z(i)Z(j)|/|X(i)X(j)|$, красными — максимальные. Изменение величины ρ вследствие смещения точки исследуемого семейства будем изображать таким же образом на второй логарифмической шкале (под первой и выровненной с ней). Шкалы будем подписывать обозначениями данного семейства — Y — и семейства, получившегося в результате смещения — Y'. Смещения полагаем настолько малыми, что черные отрезки семейства остаются черными. Если смещение точки семейства приводит к укорачиванию отрезка $[\min \mathcal{A}(F,G), \max \mathcal{A}(F,G)]$, то это означает получение семейства Y' такого, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$. За смещаемыми по логарифмической шкале цветными точками будем сохранять прежнюю раскраску. Окраску отрезков и точек будем кодировать (на случай одноцветной печати): для отрезков — толщиной линии (тонкая — синий цвет, толстая — красный), для точек — формой (кружок — синий цвет, квадратик — красный).

Основной результат

Обозначим y_0 множество 3-точечных семейств Y, значения каждого из которых лежат на некоторой прямой. Конфигурацией семейства будем называть всякое взаимное расположение каких-либо окрашенных отрезков семейства. Про конфигурацию будем говорить говорить, что она входит в состав семейства.

Лемма 1. Пусть Y — семейство, определяющее некоторый невырожденный треугольник. Тогда в состав семейства не может входить конфигурация вида, показанного на рис. 1.

Доказательство. Для конфигурации, указанной в заключении леммы, имеем:

$$\frac{|Y(i)Y(k)|}{|X(i)X(k)|} = \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|}.$$

Применив подходящее ортогональное преобразование можно полагать, что общее значение этих величин равно 1, т.е.

$$|Y(i)Y(k)| = |X(i)X(k)|, \ |Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|.$$

Построение семейства Y по семейству X при соблюдении последнего условия можно наглядно представить как результат развертывания угла $X(k)$ в треугольнике $X(1)X(2)X(3)$ до $180°$. При таком преобразовании длина отрезка $X(i)X(j)$ может только увеличиться, что противоречит указанной в конфигурации раскраске отрезков.

Лемма доказана.

Дадим определение ключевого в проводимом исследовании понятия.

Определение 1. Будем говорить, что позиция точки a семейства $Y \in \mathcal{M}$ положительна, если существует такое достаточно малое смещение точки a, при котором:

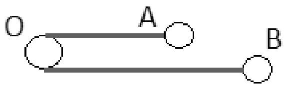
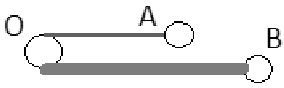
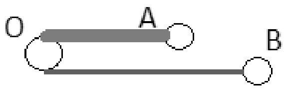
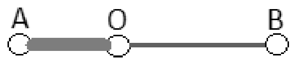
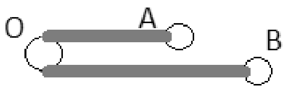
- смещаемое семейство остается в множестве $\mathcal{M}$;
- длины всех инцидентных точке a синих отрезков увеличиваются, длины красных — уменьшаются.

Если для точки a приведенное определение не выполняется, то будем говорить, что позиция точки a неположительна.

Для семейств множества y_0 полагаем: $\mathcal{M}$ — прямая, на которой расположены точки семейства. Точку семейства, инцидентную ровно одному окрашенному отрезку, будем называть свободной вершиной этого отрезка. Для семейства $Y \in \mathcal{Y}_0$ положительность позиции свободной вершины очевидна (как для синего отрезка, так и для красного).

Классифицируем позиции точки, инцидентной ровно двум окрашенным отрезкам. Обозначим: O — смещаемая точка 3-точечного семейства $Y \in \mathcal{Y}_0$; A,

Таблица 1. Позиции общей вершины двух окрашенных отрезков

OA	OB	$\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OB}$
с	с		
		Рис.2. Положительная позиция	Рис.3. Неположительная позиция
с	к		
		Рис.4. Неположительная позиция	Рис.5. Положительная позиция
к	с		
к	к	Рис.6. Неположительная позиция	Рис.7. Положительная позиция
			
		Рис.8. Положительная позиция	Рис.9. Неположительная позиция

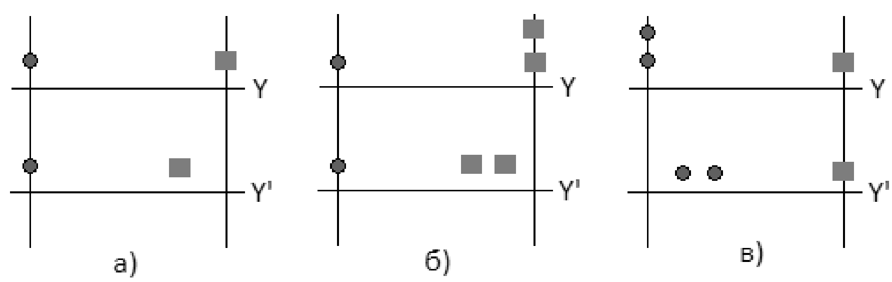


Рис. 10. Смещения точек на логарифмической шкале: а) смещение красной точки; б) смещение двукратной красной точки; в) смещение двукратной синей точки.

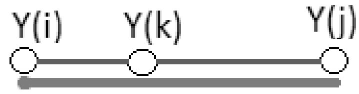


Рис. 11. Семейство класса $\mathcal{K}$.

B — концы отрезков, инцидентных точке O. На схематических изображениях семейства Y отрезок OA будем изображать короче, чем отрезок OB. Отрезки OA и OB будем рассматривать как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Взаимное расположение точек O, A, B на прямой будем классифицировать по признакам $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OB}$. В каждом случае следует изобразить отрезки семейства для каждого из 4-х вариантов раскраски отрезков OA и OB . Результаты представлены в таблице 1, где обозначено: с, к — цвета отрезков, синий и красный соответственно. Утверждения о позиции точки O, представленные графически в таблице 1, мы полагаем геометрически очевидными и принимаем их как первичные.

Для формулировки основной теоремы нам потребуется ввести в рассмотрение некоторый класс семейств.

Определение 1. Пусть X — семейство, определяющее невырожденный треугольник. Определим семейства $Y_{ijk} \in \mathcal{Y}_0$ следующим образом:

$$Y_{ijk} = \left\{ \begin{smallmatrix} i & j & k \\ Y(i) & Y(j) & Y(k) \end{smallmatrix} \right\} : |Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|,$$
$$\tfrac{|Y(i)Y(k)|}{|Y(j)Y(k)|} = \tfrac{|X(i)X(k)|}{|X(j)X(k)|}.$$

Полагаем $\mathcal{K} = \cup_{ijk} Y_{ijk}$, где объединение берется по всем перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$.

Теорема 1. Пусть X — семейство, определяющее невырожденный треугольник, $Y \in \mathcal{Y}_0$. Если $Y \notin \mathcal{K}$, то существует семейство $Y' \in \mathcal{Y}_0$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. 1) Пусть $Y \in \mathcal{Z}_1^1(X)$. В этом случае любой из окрашенных отрезков семейства имеет свободную вершину, позиция которой заведомо положительна. Смещая вершину, например, красного отрезка, получаем требуемое (см.рис.10 а)).

2) Пусть $Y \in \mathcal{Z}_1^2(X)$. В этом случае красные отрезки семейства смежны. Если позиция общей вершины этих отрезков положительна, то смещая ее соответствующим образом, получаем требуемое (см.рис.10 б)).

Пусть позиция общей вершины двух красных отрезков неположительна. Соответствующая конфигурация приведена в таблице 1, рис. 9. Дополняя эту конфигурацию синим отрезком получим конфигурацию вида, приведенного на рис. 1, что противоречит лемме 1.

3) Пусть $Y \in \mathcal{Z}_2^1(X)$. В этом случае синие отрезки семейства смежны. Если позиция их общей вершины положительна, то смещая ее получаем требуемое (см. рис.10 в)).

Пусть позиция этой вершины неположительна. Соответствующая конфигурация приведена в таблице 1, рис. 3. Дополняя эту конфигурацию красным отрезком, получим конфигурацию вида, приведенного на рис. 11.

Обозначим: $Y(k)$ — общая вершина двух синих отрезков; $Y(i)$, $Y(j)$ — оставшиеся точки семейства. Согласно раскраске отрезков семейства имеем:

$$\frac{|Y(i)Y(k)|}{|X(i)X(k)|} = \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|},$$

то есть

$$\frac{|Y(i)Y(k)|}{|Y(j)Y(k)|} = \frac{|X(i)X(k)|}{|X(j)X(k)|}. \tag{1}$$

Применив подходящее ортогональное преобразование можно полагать, что

$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = 1$, то есть

$$|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|. \tag{2}$$

Из (1) и (2) выводим: $Y \in \mathcal{K}$, что исключено условием теоремы.

Теорема доказана.

Таким образом, для вычисления степени невырожденности треугольника достаточно посчитать расстояния от семейства, определяемого этим треугольником, до семейств класса $\mathcal{K}$ (в количестве 3!) и взять наименьшее из них.

Заключение

Предложенный в работе метод выявления в множестве k-точечных семейств, представляющих вырожденные симплексы, семейств, предполагаемо ближайших к некоторому заданному семейству, основан на классификации точек семейства, по признаку положительности/неположительности их позиции. Введение понятия положительной позиции точки семейства позволяет сократить объем выкладок, сосредоточив внимание на семействах, не имеющих точек с положительной позицией. Метод представляется применимым для получения аналогичных характеристик невырожденности симплексов большей размерности, получения достаточных признаков сохранения отношения смежности симплексов при определенных отображениях, и других.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев, А.С. Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками / А.С. Лебедев // Вычислительные технологии.— 2010.— Т. 15, № 1.— С. 85–97
2. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях / Л. Альфорс.— М.: Мир, 1969.— 154 с.
3. Суков, С.А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации / С.А. Суков.— М.: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015.— 23 с.
4. Болучевская, А.В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении / А.В. Болучевская // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.— 2013.— Т. 13, № 1 (2).— С. 20–23.
5. Гилева, Л.В. Обоснование асимптотической устойчивости алгоритма триангуляции трехмерной области / Л.В. Гилева, В.В. Шайдуров // Сиб. журн. вычисл. матем.— 2000.— Т. 3, № 2.— С. 123–136.
6. Клячин, В.А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В.А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы».— Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2009.—Вып. 4.— С. 169–182.
7. Клячин, В.А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов / В.А. Клячин, Н.А. Чебаненко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика.— 2014.— Т. 22, № 3.—С. 56–60.
8. Клячин, В.А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов / В.А. Клячин, Н.А. Чебаненко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика.— 2014.— Т. 22, № 3.—С. 56–60.
9. Игумнов, А.Ю. Метризация пространства семейств точек в Rn и смежные вопросы / А.Ю. Игумнов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика.— 2016.— Т. 37, № 6.— С. 40–54.
10. Игумнов, А.Ю. О сохранении ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении / А.Ю. Игумнов // Математическая физика и компьютерное моделирование.— 2018.— Т. 21, № 2.— С. 5–12.
11. Игумнов, А.Ю. О сохранении отношения смежности треугольников при квазиизометрическом отображении / А.Ю. Игумнов //Математическая физика и компьютерное моделирование, 2021, том 24, выпуск 4, страницы 34–52