

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ПРИЧИННЫХ ОПЕРАТОРОВ ОТОБРАЖАЮЩИХ ОДИН ГРАФ В ДРУГОЙ ГРАФ

DETERMINING THE NUMBER OF CAUSAL OPERATORS DISPLAYING ONE GRAPH TO ANOTHER GRAPH

K. Aksubaev
I. Aksyutina

Summary. In this paper, the methodology of academician L. S. Pontryagin from the theory of differential games was applied to matrix games. According to it, the matrix game is divided into escape game and pursuit game. And the number of causal operators mapping one binary graph to another binary graph in a pursuit game is calculated. The result is extended to causal maps of graphs with arbitrary bases.

Keywords: causal operators, cellular matrix, matrix games, game graphs.

Яклубаев Камиль Джекишович

К.ф.-м.н., Астраханский архитектурно-строительный университет
yak-kamil@yandex.ru

Аксютинна Ирина Владимировна

К.п.н., Астраханский архитектурно-строительный университет
aksyutina@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе к матричным играм была применена методология академика Л. С. Понтрягина из теории дифференциальных игр. В соответствии с ней матричная игра разделена на игру убегания и игру преследования. И вычислено количество причинных операторов отображающих один двоичный граф в другой двоичный граф в игре преследования. Результат распространен на причинные отображения графов с произвольными основаниями.

Ключевые слова: причинные операторы, клеточные матрицы, матричные игры, графы.

Введение

Матричная теория игр, создана математиками Нэшем и Нейманом. Но масштабы применения матричной теории игр оказались весьма скромными.

С целью расширения области применения матричной теории игр авторы решили перенести методику академика Л.С. Понтрягина [1] из теории дифференциальных игр в теорию матричных игр.

Методология Л.С. Понтрягина хорошо изучена и развита его многочисленными учениками и последователями [2,3,4].

Способ применения теории Л.С. Понтрягина к матричным играм с клеточными матрицами изложен в работе [6]. В отличие от Нэша в теории Понтрягина игра разбивается на игру убегания и игру преследования. И тогда нижняя цена игры Нэша оказывается ценой игры преследования по методике Понтрягина. А верхняя цена игры Нэша является ценой игры убегания по Понтрягину.

Есть еще одно важное отличие теории Л.С. Понтрягина от теории Нэша. Целью игры по Нэшу является цена игры. А по Понтрягину целью игры являются причинные операторы [5] преследования и убегания. Изучению причинных операторов преследования и убегания в матричной теории игр и посвящена данная работа.

Цель исследования

Целью исследования является определение общего количества причинных операторов преследования отображающих граф убегающего игрока в граф преследователя в матричной теории игр.

Материал и методы исследования

В качестве основного метода исследования игр с клеточными матрицами выбрана методика Л.С. Понтрягина из теории дифференциальных игр. Эта методика внедрена в теорию матричных игр с клеточными матрицами в работе [6].

Матричную игру с клеточными матрицами можно изучать с помощью двух двоичных графов, а можно из-

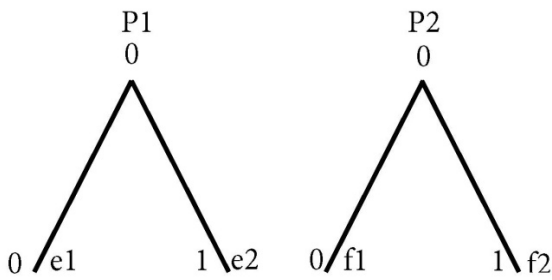


Рис 1. Игра преследования на элементарном графе

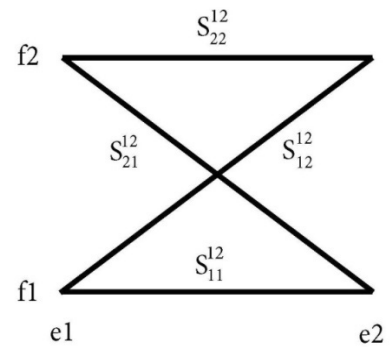
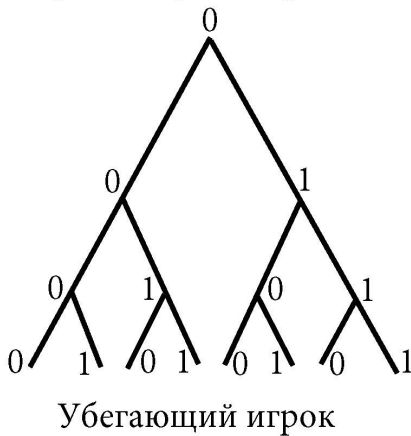


Рис 2. Схематичное изображение причинных операторов

Первый игрок, игрок №1



Второй игрок, игрок №2

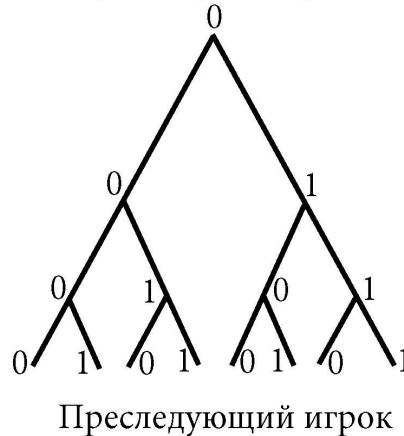


Рис. 3. Граф игры с клеточными матрицами

учать с помощью одного расширенного графа. В данном параграфе нам удобнее изучать матричную игру с клеточными матрицами с помощью двух графов.

Вычисление количества причинных операторов отображающих один двоичный граф в другой двоичный граф

Мы хотим определить процент причинных операторов граф среди всех операторов, отображающих первый граф на второй граф. Причинные операторы изучались в [5]. Для начала рассмотрим самый простой случай, когда длина двоичного графа равна единице.

Первый игрок является убегающим, а второй преследователем. Убегающий игрок ходит первым. Мы помогаем преследователю. В рамках этой помощи мы строим для преследователя причинный выигрышный оператор, который на каждый ход убегающего игрок будет подсказывать оптимальный ход преследователя (рис._1).

Но операторов отображающих множество стратегий убегающего игрока во множество стратегий преследователя всего четыре. Они являются перестановками на множестве из двух элементов. Перечислим их:

$$S_{12}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, S_{22}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, S_{21}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_{11}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{12}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f1 \\ e2 \rightarrow f2 \end{pmatrix}, S_{22}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f2 \\ e2 \rightarrow f2 \end{pmatrix}, S_{21}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f2 \\ e2 \rightarrow f1 \end{pmatrix},$$

$$S_{11}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f1 \\ e2 \rightarrow f1 \end{pmatrix}$$

Все четыре оператора схематично на одном чертеже можно изобразить следующим способом:

Операторов преследования, которые отображают пространство стратегий убегающего игрока в пространство стратегий преследователя всего четыре (рис._2). Но эти же операторы в данном случае являются и причинными операторами. Но операторы $S_{12}^{12}, S_{22}^{12}, S_{21}^{12}, S_{11}^{12}$

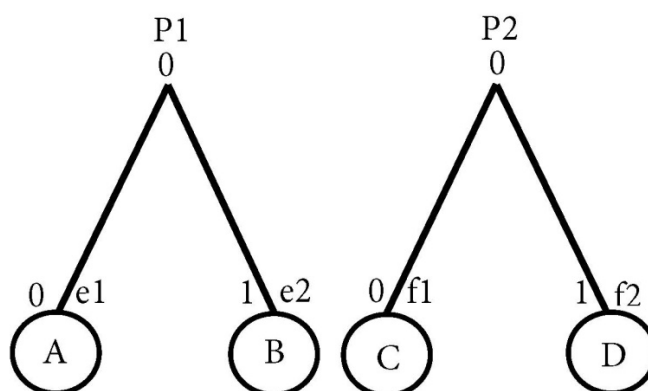


Рис. 4. Графическое представление индукционного шага

являются причинными не на всем ребре графа, только в одной точке — в вершине графа. Но в данной задаче такого рода причинность допускается.

Обозначение. Обозначим через $a(n)$ количество причинных операторов отображающих двоичный граф длиной n в двоичный граф длиной n .

Теорема. Количество причинных операторов преследования отображающих двоичный граф убегающего игрока длиной n в двоичный граф преследователя длиной n удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$a(n + 1) = 4a(n)^2, a(0) = 1, a(1) = 4.$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ формула верна. Пусть формула верна для всех $k < n$. Докажем, что она верна и для числа n .

Рассмотрим первые этажи в двух графах отдельно (рис. 3). Под первыми этажами каждого графа располагаются два подграфа длиной $n - 1$. Обозначим эти подграфы буквами: A, B, C, D .

После того, как мы спрятали подграфы длиной $n - 1$ в буквы A, B, C, D исходные графы длиной n схематично будут выглядеть так:

Основная лемма о причинных операторах.

Отображение на первых этажах графов однозначно определяют отображения букв:

$$(A, B) \rightarrow (C, D).$$

Другими словами, отображение на первых этажах графов однозначно определяют отображения соответствующих подграфов длиной $n - 1$.

Доказательство. Причинные операторы — это операторы удовлетворяющие принципу причинности. Но из принципа причинности вытекает, что если заданы отображение ребер $e1 \rightarrow f2$, то оно обязательно влечет за собой отображение подграфов $A \rightarrow D$ (рис. 4).

Это означает, что из принципа причинности вытекает истинность следующего высказываний:

$$e1 \rightarrow f1 \Rightarrow A \rightarrow C; e1 \rightarrow f2 \Rightarrow A \rightarrow D;$$

$$e2 \rightarrow f1 \Rightarrow B \rightarrow C; e2 \rightarrow f2 \Rightarrow C \rightarrow D.$$

Рассмотрим следующее отображение, заданное на первом этаже графа:

$$S_{21}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f2 \\ e2 \rightarrow f1 \end{pmatrix}$$

По основной лемме причинности это отображение однозначно порождает отображение следующих подграфов:

$$\widetilde{S}_{21}^{12}: \begin{pmatrix} A \rightarrow D \\ B \rightarrow C \end{pmatrix}$$

Рассмотрим отображение $A \rightarrow D$ подграфов длиной $n - 1$. Число причинных операторов отображающих подграф A в подграф D мы обозначили через $a(n - 1)$.

Число причинных операторов отображающих подграф B в подграф C тоже равно $a(n - 1)$. Поскольку операторы на графах не связанных между собой причинной связью действуют независимо друг от друга, то общее число причинных операторов $a(n - 1)^2$.

Точно такое рассуждение можно повести для каждого из операторов:

$$S_{22}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f2 \\ e2 \rightarrow f2 \end{pmatrix}, S_{21}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f2 \\ e2 \rightarrow f1 \end{pmatrix}, S_{11}^{12}: \begin{pmatrix} e1 \rightarrow f1 \\ e2 \rightarrow f1 \end{pmatrix}$$

Таблица 1. Процент причинных операторов

Операторы	Любые	Причинные	Процент
n	$d(n) = (2^n)^{(2^n)}$	$a(n) = 2^{(2^{n+1}-2)}$	$\frac{a(n)}{d(n)} * 100\%$
0	1	1	100%
1	4	4	100%
2	256	64	25%
3	$8^8 = 16777216$	$2^{14} = 16384$	0.098%
4	$1.8 * 10^{19}$	$1.07 * 10^9$	$6 * 10^{-9}\%$
5	$1.4 * 10^{48}$	$4.6 * 10^{18}$	0
7	$5 * 10^{269}$	$3 * 10^{76}$	0

В итоге получим, что общее число причинных операторов отображающих двоичный граф длиной n в двоичный граф длиной n удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению:

$$a(n) = 4a(n)^2, a(1) = 4$$

Теорема. Общее число причинных операторов преследования отображающих двоичный граф убегающего игрока длиной n в двоичный граф преследователя длиной n равно:

$$a(n) = 2^{(2^{n+1}-2)}$$

Доказательство. Прологарифмируем полученное рекуррентное уравнение. Получим:

$$\log_2 a(n+1) = 2\log_2 a(n) + 2, a(0) = 1, a(1) = 4$$

Обозначим: $b(n) = \log_2 a(n)$. Получим:

$$b(n+1) = 2b(n) + 2; b(1) = 2, b(0) = 0$$

Увеличив индекс уравнения на единицу, получим:

$$b(n+2) = 2b(n+1) + 2.$$

Вычтя из полученного уравнения предыдущее уравнение, получим однородное рекуррентное уравнение:

$$b(n+2) - b(n+1) = 2b(n+1) - 2b(n) \\ b(n+2) - 3b(n+1) + 2b(n) = 0, b(1) = 2, b(0) = 0.$$

Характеристическое уравнение и его корни таковы:

$$z^2 - 3z + 2 = 0, z_1 = 2, z_0 = 1$$

Общее и частное решения однородного рекуррентного уравнения таковы:

$$b(n) = A2^n + B1^n, b(1) = 2, b(0) = 0 \Rightarrow \\ b(n) = \log_2 a(n) = 2^{n+1} - 2$$

В итоге получим, что общее число причинных операторов равно:

$$a(n) = 2^{(2^{n+1}-2)}$$

Теорема доказана.

В нашей теореме не существен тип игры. То есть здесь не существенно тот факт будет ли эта игра игрой преследования или убегающего. Теорема доказана для причинных отображений из одного двоичного графа в другой

Остается ответить на следующий вопрос: «Большой или малый процент составляют причинные операторы среди всех операторов, действующих из одного двоичного графа длиной n в другой двоичный граф длиной n ?».

Теорема. Общее число всех операторов отображающих один двоичный граф длиной n в другой двоичный граф длиной n равно:

$$d(n) = (2^n)^{(2^n)}$$

Доказательство. Число ветвей двоичного графа длиной n равно 2^n . То есть нам нужно вычислить число функций отображающих 2^n элементное множество в 2^n элементное множество. Это число равно:

$$d(n) = (2^n)^{(2^n)}$$

Числа $d(n)$ растут чрезвычайно быстро.

Численное сравнение количество причинных операторов и количество всех операторов:

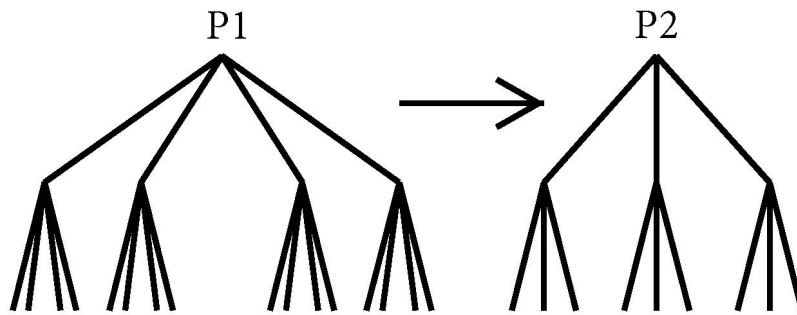


Рис. 5. Причинные операторы на произвольных графах

В таблице 1 мы видим, что процент причинных операторов во множестве всех операторов быстро становится почти нулем уже при $n = 5$.

Результаты исследования и их обсуждение. Вычисление количества причинных операторов отображающих граф с основанием k в граф с основанием m .

Определение. Граф с основанием k это граф, у которого из каждого узла выходит ровно k ребер. Другими словами, граф с основанием k это k -ичный граф. Этот граф соответствует системе исчисления с основанием k . Граф с основанием m это граф, у которого из каждого узла выходит ровно m ребер. Другими словами, граф с основанием m это m -ичный граф. Этот граф соответствует системе исчисления с основанием m .

Приведем рисунок с изображением обеих графов:

Повторим рассуждения из предыдущего параграфа на произвольных графах (рис._5).

При $n = 1$ число причинных отображений первого графа во второй граф будет равна m^k . Рекуррентная формула будет выглядеть следующим образом:

$$a(n) = m^k a(n - 1)^k, a(0) = 1, a(1) = m^k$$

Прологарифмировав получим:

$$\log_m a(n) = k \log_m a(n - 1) + k, \\ \log_m a(0) = 0, \log_m a(1) = k$$

Введем обозначения: $b(n) = \log_m a(n)$. Получим:

$$b(n) = kb(n - 1) + k, b(0) = 0, b(1) = k.$$

Увеличим индекс рекуррентного уравнения на единицу. Получим:

$$b(n + 1) = kb(n) + k, b(0) = 0, b(1) = k.$$

Исключив из системы свободный член, получим однородное рекуррентное уравнение:

$$b(n + 1) - (k + 1)b(n) + kb(n - 1) = 0, b(0) = 0, b(1) = k$$

Характеристическое уравнение полученного однородного рекуррентного уравнения и его корни таковы:

$$\lambda^2 - (k + 1)\lambda + k = 0; \lambda_1 = 1; \lambda_2 = k$$

Общее решение и частное решения рекуррентного уравнения таковы:

$$b(n) = A * k^n + B * 1^n, b(1) = k, b(0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b(n) = k \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

В итоге получим следующую теорему.

Теорема. Общее число причинных операторов, отображающий граф с основание k и длиной n в граф с основание m и длиной n равно:

$$a(n) = m^{\left(k \frac{k^n - 1}{k - 1}\right)}$$

Заключение. В игре преследования по методологии Л.С. Понтрягина нужно определять причинные операторы, отображающие граф убегающего игрока в граф преследователя.

Именно причинные операторы, а не цена игры, как это предполагается у Нэша, являются подлинными решениями задач теории игр.

И первым шагом на пути внедрения методологии академика Л.С. Понтрягина в теорию игр с клеточными матрицами, является определение общего количества причинных операторов. В настоящей работе этот шаг сделан, то есть количество причинных операторов, отображающих графы разных типов один в другой авторами вычислено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. — Докл. АН СССР, 1967, т 174, № 6, С. 1278–1281.
2. Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, "Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем", Матем. заметки, 97:5 (2015), 749–760.
3. Абдулла А. Азамов, Атамурат Ш. Кучкаров, Азамат Г. Холбоев, "Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников. II", МТИП, 8:4 (2016), 3–13.
4. Половинкин Е. С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014, с. 350.
5. Яксубаев К. Д. Выделение причинного селектора из многозначного отображения. Доклады АН УзССР, № 6, 1987, -С. 13–15.
6. Яксубаев К. Д. Игры с клеточными матрицами как игры преследования и убегания. Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 5–5 (47). С. 47–51.

© Яксубаев Камилъ Джекишович (yak-kamil@yandex.ru), Аксиютина Ирина Владимировна (aksyutina@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



Г. Астрахань