DOI 10.37882/2223-2966.2024.12-2.04

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТОНАЦИИ В ПРОЦЕССАХ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ С НАРУШЕНИЕМ ПРИНЦИПА ПРИЧИННОСТИ

NUMERICAL SIMULATION OF DETONATION IN THE PROCESSES OF SELF-ORGANIZED CRITICALITY WITH THE VIOLATION OF THE CAUSALITY PRINCIPLE

V. Vladimirov

Summary. Self-organized criticality is a concept of avalanche-like phenomena observed in some complex nonlinear systems with scale invariance and arising in the absence of a control factor. The absence of a control factor in the vicinity of criticality leads to uncertainty in the formalism of the causality principle. It is found that, taking into account the violation of the causality principle, rare sets of random numbers are reduced to only two topological patterns similar to two characteristic sections of the electrocardiogram — peak connectivity and relaxation. The achievement of a critical state is determined by stacking data into topological patterns, whereas the distribution of the connectivity index obeys the power law of distribution.

The method of topological patterns is based on a formula for a new physical characteristic of a fractal manifold — the connectivity index, which has no analog in spaces of integer dimension. In the applications in the field of information technology and measuring technology, where there is a problem of choosing an objective quantitative criterion for the noise immunity of devices, the *SNR* name is used, which is the signal-to-noise ratio. The connectivity index or *SNR* is invariant with respect to any linear transformations of the original data, whereas for sets of Gauss and Bessel functions, it does not depend on the granulation number, which differs from other formulations of *SNR*. The article provides a formula for the connectivity index or *SNR*.

The connectivity index is defined in a fractal manifold, where the representation of a complex nonlinear system with a tendency to self-organization in ordinary space is replaced by a description of a simple linear system in a fractal space. The construction of a fractal manifold becomes possible when the principle of causality is violated. The simulation of inelastic collisions leads to an explosive increase in criticality among sets of random numbers or to the process of detonation — as the creation of order out of chaos.

Keywords: self-organized criticality SOC, fractal manifold, causality principle, connectivity index, signal-to-noise ratio SNR, random number generator, detonation.

Владимиров Виталий Владимирович
Ассистент, Иркутский государственный университет
vital.vladimirov@mail.ru

Аннотация. Самоорганизованная критичность (*SOC*) — концепция лавинообразных явлений, наблюдаемых в некоторых сложных нелинейных системах, обладающих масштабной инвариантностью, степенным законом распределения и возникающих в отсутствии управляющего фактора. Отсутствие управляющего фактора в окрестности критичности приводит к неопределённости в формализме принципа причинности. Обнаружено, что с учётом нарушения принципа причинности редкие наборы случайных чисел сводятся только к двум топологическими шаблонам, подобным двум характерным участкам электрокардиограммы — пиковой связанности и релаксации. Достижение критического состояния определяется укладкой данных в топологические шаблоны, а распределение индекса связанности подчиняется степенному закону распределения.

Метод топологических шаблонов основан на формуле для новой физической характеристики фрактального многообразия — индекса связанности Милованова, который не имеет аналога в пространствах целой размерности. Для приложений в сфере информационных технологий, измерительной технике, где существует проблема выбора объективного количественного критерия помехоустойчивости устройств, используется название *SNR*, отношение сигнала к шуму. Индекс связанности или *SNR* инвариантен относительно любых линейных преобразований исходных данных, а для множеств точек функций Гаусса и Бесселя не зависит от числа гранулирования, что отличает от других формулировок *SNR*. В статье приводится формула для индекса связанности или *SNR*.

Индекс связанности определяется во фрактальном многообразии, где представление сложной нелинейной системы с тенденцией к самоорганизации в обычном пространстве подменяется описанием простой линейной системы во фрактальном пространстве. Построение фрактального многообразия становится возможным при нарушении принципа причинности. Имитация неупругих столкновений приводит к взрывному росту критичности среди наборов случайных чисел или к процессу детонации — как создание порядка из хаоса.

Ключевые слова: самоорганизованная критичность SOC, фрактальное многообразие, принцип причинности, индекс связанности, отношение сигнала к шуму SNR, генератор случайных чисел, детонация.

Введение

Искусственные нейронные сети возникли в качестве попытки моделировать организацию и функционирование биологических нейронных сетей — сетей нервных клеток живого организма. В существующих алгоритмах искусственного интеллекта ключевым звеном является решение задачи оптимизации и при этом остаётся вопрос — решает ли биологическая нейронная сеть задачу оптимизации? Задача оптимизация — это нахождение экстремумов целевой функции в процессе проектирования параметров системы. Под задачу оптимизации сформировался функциональный подход, который предполагает рассмотрение объекта как комплекса выполняемых им функций, а не как набора элементов и их взаимосвязей.

Исследования процессов самоорганизованной критичности (SOC) в сложных нелинейных системах позволяют выйти за границы функционального подхода, когда отсутствует управляющий фактор [1].

В отсутствии управляющего фактора теряется детальная привязка принципа причинности и возникает неопределённость причинно-следственных связей элементов внутри системы. В статье рассматривается альтернативная оптимизации постановка задачи, без целевой функции и без поиска экстремума, но с учётом степени взаимной связанности элементов сложной системы исключительно в окрестности критичности, а именно — укладываются ли численные характеристики взаимосвязанных элементов системы в некий топологический шаблон или примитив. На модельном примере с применением генератора случайных чисел демонстрируется, как попадание численных данных в топологический шаблон означает достижение системой критического состояния.

1. Концепция самоорганизованной критичности

Концепция *SOC* активно используется для исследования критического поведения во множестве систем, особенно в нейронных сетях, широко распространены в природе [2], проявляясь в разнообразных явлениях, таких как песчаные лавины [3, 4], рисовые лавины [5], лесные пожары [6, 7], распределение магнитуд землетрясения [8], солнечные вспышки [9], курсы фондового рынка [10], связанность социальных сетей [11], нейронные лавины [12-14] и т.д. Подход *SOC* был предложен для описания активности мозга [15, 16], а первые степенные распределения нейронных лавин были обнаружены [17].

Согласно экспериментальным данным [18 — 22], мозг здоровых млекопитающих функционирует в состоянии лавинообразных процессов в нейронных сетях. Когда функция мозга нарушается во время эпилептических припадков, биологическая нейронная сеть теряет свои характеристики лавины. Наиболее мощная нейронная сеть экспериментально обнаружена у младенцев [20], способствующая адаптации младенцев в экстремально нестабильном внешнем окружении. Интеллект младенца или стадный интеллект обозначает задачу численного моделирования интеллекта в традиционном для физики подходе «эксперимент — модель», в отсутствии внешних управляющих факторов. Характерно проявление стадного интеллекта в межвидовых и внутривидовых конфликтах, а именно, в предельно нестабильном внешнем окружении и в отсутствии каких-либо извне установленных правил, в отличие от существующей концепции искусственного интеллекта с алгоритмом оптимизации.

Фрактальное многообразие

Фракталы представляют интерес из-за их масштабной инвариантности и самоподобной геометрии фрактальных объектов. Всё же вопрос «фракталы: где физика?» [23] остается актуальным: где связь между фракталами и *SOC* системами?

В статье представлен метод, основанный на теоретических подходах к пониманию поведения сложных нелинейных динамических систем, формирующих состояния самоорганизации. В ключевых для предлагаемого подхода публикациях [24; 25] приведён ряд нестандартных идей применения фрактальных объектов к описанию нелинейной динамической системы, где раскрывается механизм самосогласованной сходимости к коллективным состояниям. В непосредственной близости от состояния самоорганизации количество степеней свободы становится минимальным. С точки зрения топологии пространства это означает, что фрактальная размерность пространства уменьшается из-за появления дробных непроницаемых областей, моделирующих состояние самоорганизации. Представление сложной нелинейной системы с тенденцией к самоорганизации в обычном пространстве подменяется описанием простой линейной системы во фрактальном пространстве. Таким образом, сложность нелинейной системы переносится на сложность пространства. Физика описываемого подхода не имеет размерности. Поведение сложной нелинейной системы в окрестности критичности определяется исключительно топологическими свойствами пространства, не зависит от природы взаимодействия и носит универсальный характер, как и процессы *SOC*.

В ряду идей фрактального многообразия, Милованов дал определение новому физическому понятию — индекс связанности θ, который не имеет аналога в пространствах целой размерности. В данном подходе связанность является единственной физической характеристикой в описании сложной нелинейной системы и ниже в статье приводится вывод формулы для индекса связанности θ (12–14).

Важный класс фрактальных объектов образует множества, описывающие геометрию перколяции. Теория перколяции или теория просачивания — математическая теория, используемая в физике, химии и других областях для описания возникновения связных структур в случайных средах, состоящих из отдельных элементов. Перколяция является критическим процессом [26], т.е. предполагает существование некоторого порога, ниже которого распространение жидкости ограничено конечной областью среды. Вблизи критического порога перколяция происходит по фрактальному множеству, геометрия которого определяется исключительно законами критичности. Условие критичности делает геометрические характеристики фрактального пространства независимыми от микроскопического свойства среды. Это явление интерпретируется как универсальность самоорганизации.

Фрактальная размерность пространства позволяет создавать непроницаемые области, имитирующие самоорганизацию, но при этом возникает проблема с определением среднего значения, которое зависит от размерности пространства. Проблема среднего значения известна для степенного закона распределения процессов SOC, имеющего экспериментальное подтверждение, когда появление редкого события способно радикально изменить среднее значение. Важное наблюдение, отмеченное в [27]: в системах SOC изучаемым универсальным явлением критичности является редкое случайное событие, «чёрные лебеди». По сути, ставится знак равенства между критичностью и редким случайным событием, которое, в свою очередь, делает неопределённым вычисление среднего значения.

Эмпирически подтверждённое требование инвариантности задачи в окрестности критичности относительно произвольного линейного преобразования исходных данных в виде:

$$\tilde{x} = cx + a \tag{1}$$

для любых c и a. Требование инвариантности применимо только к окрестности проявления критичности, означающее совместную и масштабную инвариантность, и инвариантность выбора системы отсчёта. В формулировке задачи требование инвариантности снимает исключительность со среднеарифметического значения, приравнивая его роль к любому среднему по Колмогорову. Отметим, что инвариантность относительно любых линейных преобразований является очень жёстким требованием по отношению к результату в обработке экспериментальных данных в процессах SOC.

Приводится важное для дальнейшего применения свойство фрактального пространства. Если описание сложной нелинейной системы в евклидовом пространстве подменяется описанием простой линейной системы во фрактальном пространстве, то в результате ранжирования в евклидовом пространстве выделенной простой линейной системой является линейная аппроксимация ранжированных исходных данных. Здесь учитывается, что операция ранжирования, а так же медиана не зависят от выбора какой-либо метрики расстояния. Таким образом, в окрестности критичности следует ожидать приблизительное равенство коэффициента детерминации $R^2_{sort} \approx 1$.

В публикациях [24; 25] остался открытым вопрос о примерах фрактального многообразия. В данной статье приводится пример построения фрактального многообразия, при этом вводится нарушение принципа причинности в качестве необходимого условия фрактальной топологии.

Причинно-следственная инвариантность

Отсутствие управляющих параметров приводит к нарушению принципа причинности в математическом описании процессов SOC. В окрестности критичности внешняя шкала времени не имеет привязки к происходящему внутри процессу. Каждая шкала времени порождается исключительно своим процессом SOC. Другими словами, в отсутствии управляющих параметров становится невозможным формализовать причинно-следственную последовательность событий в виде какой-либо функции от времени, так как критичность достигается сама по себе.

Как будет показано в данной публикации на модельном примере, критичность или самоуправление в сложной нелинейной системе достигается через топологические шаблоны — укладываются ли численные данные в некий топологический шаблон или примитив.

Достаточно очевидны в двухмерном пространстве свойства такого топологического шаблона, как окружность при дискретном разбиении на M частей:

- любая точка контура выбирается за начало отсчёта;
- с единичным шагом увеличения индекса, (2) конечная точка переходит в начало;
- произвольное направление обхода контура.

Дискретноемножествоточекнаокружностидаётпредварительное формальное понимание математического описания причинно-следственной инвариантности.

В основе предлагаемого в статье подхода применяется правило причинно-следственной инвариантности (2) для топологических шаблонов в одномерном пространстве. Пространство дробной размерности содержит непроницаемые области, ограничивая данные неким шаблоном. Символом *M* далее обозначается конечное число разбиения контура шаблона в одномерном пространстве.

Численная модель детонации

Таким образом, построение численной модели процесса самоорганизованной критичности основывается на следующих требованиях инвариантности в окрестности критического состояния:

- Инвариантность относительно линейных преобразований (1);
- Причинно-следственная инвариантность (2).

В данном разделе показано, как с учётом требований инвариантности обычный генератор случайных чисел создаёт состояние самоорганизованной критичности. Для нахождения формы топологических шаблонов применяется генератор случайных чисел (ГСЧ) с выборкой в 2^{32} в модуле Numerical Python. Заметим, что номера ГСЧ носят символьный характер, как номера домов или телефонов, и приведены исключительно с целью предоставления возможности воспроизвести полученные результаты читателями этой статьи. Всегда существует возможность использовать cryptographically secure pseudorandom number generator без символьных обозначений и с тем же результатом. Таким образом, применение ГСЧ в предлагаемом исследовании не относится к функциональному подходу.

Каждый набор случайных чисел из выборки в 2^{32} содержит девять значений ($M = 9$). Алгоритм вычислений включает в себя просмотр и сортировку наборов случайных чисел с наименьшей и наибольшей связанностью θ в заданном диапазоне случайных чисел [−1;+1].

Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2, где порядок выпадения случайных чисел в наборе обозначен в качестве событий по внешней шкале времени. Вид формул для связанности θ (12–14) будет представлен в следующем разделе статьи.

Среднее по всей выборке 2^{32} значение $R^2_{sort} = 0.930$, а значение для показателя связанности $\theta = 0.430$. Наборы с экстремальными значениями связанности θ относятся к редким случайным событиям и соответствуют значениям R^2_{sort} значительно выше среднего.

Основной результат вычислений состоит в том, что экстремальные значения связанности соответствуют всего лишь двум топологическим формам наборов слу-

Таблица1.

ГСЧ с наибольшей связанностью θ, рессора

№_ГСЧ	События по внешней шкале времени (1–9)										
	θ	R^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1862618432	7.448	0.962	–0.90	–0.91	–0.58	–0.05	0.45	0.65	0.45	–0.06	–0.55
2173071005	7.422	0.962	0.25	0.76	0.98	0.76	0.27	–0.26	–0.60	–0.60	–0.25
717135009	7.389	0.98	0.80	0.54	0.00	–0.48	–0.72	–0.57	–0.14	0.39	0.73
4210685804	7.374	0.964	0.60	0.03	–0.61	–0.99	–0.96	–0.54	0.09	0.63	0.78
3472781350	7.374	0.97	0.48	0.91	0.91	0.48	–0.22	–0.75	–0.93	–0.64	–0.12

Таблица 2.

ГСЧ с наименьшей связанностью θ, пружина

№	№_ГСЧ	θ	R^2	События по внешней шкале времени (1–9)								
				1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3194684329	0.0312	0.98	0.47	–0.78	0.20	–0.40	–0.24	0.06	–0.69	0.42	–0.85
2	1360056382	0.0312	0.96	0.14	–0.54	0.77	–0.91	0.98	–0.97	0.76	–0.54	0.17
3	3958278664	0.0312	0.98	0.29	–0.46	0.78	–0.74	0.87	–0.69	0.57	–0.29	0.07
4	4146441910	0.0312	0.97	0.95	–0.19	0.64	0.25	0.15	0.75	–0.24	1.00	–0.38
5	1489233634	0.0311	0.96	0.22	–0.15	0.59	–0.42	0.72	–0.43	0.58	–0.18	0.25

Таблица 3.
Roll-матрица ГСЧ №1862618432, рессора

–0.90	–0.91	–0.58	–0.05	0.45	0.65	0.45	–0.06	–0.55
–0.55	–0.90	–0.91	–0.58	–0.05	0.45	0.65	0.45	–0.06
–0.06	–0.55	–0.90	–0.91	–0.58	–0.05	0.45	0.65	0.45
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
–0.91	–0.58	–0.05	0.45	0.65	0.45	–0.06	–0.55	–0.90

Таблица 4.
Roll-матрица ГСЧ №3194684329, пружина

0.47	–0.78	0.20	–0.40	–0.24	0.06	–0.69	0.42	–0.85
–0.85	0.47	–0.78	0.20	–0.40	–0.24	0.06	–0.69	0.42
0.42	–0.85	0.47	–0.78	0.20	–0.40	–0.24	0.06	–0.69
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
–0.78	0.20	–0.40	–0.24	0.06	–0.69	0.42	–0.85	0.47

чайных чисел, названных «рессора» и «пружина». Представим наборы случайных чисел в виде roll-матриц 9x9, где каждая строка последовательно свёрнута по кругу на одно значение:

Значения физической характеристики связанности θ в строках и столбцах каждой из roll-матрицы совпадают между собой. Рулонная матрица соответствует поворотной матрице в пространстве допустимых причинно-следственных связей, демонстрирующая инвариантность задачи относительно выбора точки отсчёта событий в отсутствии управляющих параметров.

Форма кривой распределения значений определителей roll-матрицы наборов случайных значений обладает асимметрией, что указывает на неполноту описания в системе и требует включения обратных roll-матриц. Каждому набору случайных чисел соответствует прямая и обратная roll-матрицы. Таким образом, нарушение принципа причинности размораживает дополнительную степень свободы, которая содержится в наборе случайных чисел. Представляется важным отметить, что обратная к roll-матрицы топологии рессоры соответствует топологии пружины, и наоборот. Набор случайных чисел подобен магниту, который состоит из двух неразрывных полюсов. С учётом удвоения выборки, кривая распределения по значениям индекса связанности θ становится степенной. Чем больше чисел в случайном наборе (M), тем более редким событием становится критичность.

Процесс детонации моделируется чередованием наборов случайных чисел с высокой и низкой связанностью, а именно, перемножением соответствующих roll-матриц. В строках и столбцах результирующей матрицы значения связанности совпадают между собой, как и в сомножителях исходных roll-матриц. При этом радикально меняется характер распределения индекса связанности при возведении в степень или перемножении roll-матриц наборов случайных чисел, имитирующие неупругие столкновения и приводящие к эффекту моджари: убывающий степенной характер распределения сменяется на взрывной рост критичности в конце распределения. В распределении растёт доля упорядоченных наборов с предельно высокой и низкой связанностью. Перемножение roll-матриц приводит к взрывному росту упорядоченности или, другими словами, самоорганизованной критичности из хаоса наборов случайных чисел.

Существующие исследования в области детонации нацелены на объяснение экспериментальных явлений, в рамках же настоящей публикации по численному моделированию под процессом детонации понимается математический алгоритм возникновения упорядоченности из хаоса. Алгоритм детонации индекса связанности включает в себя:

1. Определение физической характеристики сложной системы в виде индекса связанности θ (12–14), который характеризует переход от хаоса к упорядоченности.
2. Сопряжённость, возникающая из нарушения принципа причинности, в представлении набора случайных чисел в виде прямой и обратной roll-матриц;
3. Моделирование неупругих взаимодействий (слияние, поглощения) через степень или перемножение roll-матриц.

При этом конструкции для индекса связанности θ и roll-матриц не имеют соответствующих физических аналогов в привычном пространстве целой размерности и с выполнением принципа причинности. С другой стороны, по факту признанная универсальность процессов SOC, масштабная инвариантность, отсутствие управляющих факторов, негауссовость или степенной закон распределения не признаются интуитивно понятными и привычными.

По сути, сверх того, что заложено в исходных представлениях математического формализма нарушения принципа причинности, основным результатом является взрывной рост критичности при возведении в степень или перемножении roll-матриц. Численное моделирование детонации оказывается возможным благодаря удивительному свойству roll-матрицы: при возведении в степень или многократного перемножения roll-матриц произвольного набора случайных чисел возникает, преимущественно, топологическая форма или пружины, или рессоры. При этом перемножение roll-матриц интерпретируется в качестве реакции слияния, поглощения.

В трехмерном пространстве наложение причинно-следственной инвариантности на вращательную симметрию приводит к механизму масштабно инвариантной природной центрифуге спиральной формы, с сепарацией областей предельно высокой и предельно низкой связанности. Таким образом, топология пространства с нарушением принципа причинности или, точнее, причинно-следственной инвариантностью относительно выбора начала отсчёта событий способна обладать динамическими свойствами.

2. Вычислительный метод для связанности θ

В развитии идей [24] предлагается [28] пример построения фрактального многообразия в одномерном евклидовом пространстве на основе фрактала пыль Кантора. Сам фрактал пыль Кантора является фрактальным «однообразием».

Ключевым шагом в предлагаемом подходе является алгоритм построения фрактального многообразия — нового математического объекта в простейшем случае одномерного евклидова пространства. При этом учитывается требование причинно-следственной инвариантности (2) в окрестности критичности.

Фрактал пыль Кантора или геометрическая прогрессия (в классическом фрактале множества Кантора $q = 2/3$) имеет символическую форму:

$$F \sim 1 - (1-q) - (1-q)q - (1-q)q^2 - (1-q)q^3 - \cdots \quad (3)$$

Для построения фрактального многообразия предложен следующий способ: фрактальное многообразие, например, для $M = 5$ произвольного набора из пяти упорядоченных чисел a_i имеет вид:

$$\begin{aligned}
\widetilde{a_0^R}(a,5) &= a_0 - (1-q)a_1 - (1-q)qa_2 - (1-q)q^2a_3 - \\
&-(1-q)q^3a_4 - (1-q)q^4a_0 - (1-q)q^5a_1 - \\
&-(1-q)q^6a_2 - \cdots \\
\widetilde{a_1^R}(a,5) &= a_1 - (1-q)a_2 - (1-q)qa_3 - (1-q)q^2a_4 - \\
&-(1-q)q^3a_0 - (1-q)q^4a_1 - (1-q)q^5a_2 - \\
&-(1-q)q^6a_3 - \cdots \\
\widetilde{a_0^L}(a,5) &= a_0 - (1-q)a_4 - (1-q)qa_3 - (1-q)q^2a_2 - \\
&-(1-q)q^3a_1 - (1-q)q^4a_0 - (1-q)q^5a_4 - \\
&= (1-q)q^6a_3 - \cdots \\
\widetilde{a_1^L}(a,5) &= a_1 - (1-q)a_0 - (1-q)qa_4 - (1-q)q^2a_3 - \\
&-(1-q)q^3a_2 - (1-q)q^4a_1 - (1-q)q^5a_0 - \\
&-(1-q)q^6a_4 - \cdots
\end{aligned} \quad (4)$$

Важно, что с каждым фрактальным циклом m, где $m \to \infty$, новое значение a_i появляется исключительно из ограниченной выборки данных M, затем далее по замкнутому контуру. Число разбиений топологического шаблона обозначено M. Таким образом, возникает замкнутый контур в одномерном пространстве из-за требования причинно-следственной инвариантности (2). Различаются левое и правое направления контура.

В общем:

$$\widetilde{a_i^R}(a,M) = a_i - \frac{1-q}{1-q^{M+1}}\left[\sum_{k=1}^{M}\left(q^k a_{mod(k+1+i,M+1)}\right)\right] \quad (5)$$

Аналогично, для $\tilde{a}_i^L(a,M)$, получается следующее:

$$\widetilde{a_i^L}(a,M) = a_i - \frac{1-q}{1-q^{M+1}}\left[\sum_{k=1}^{M}\left(q^{n-k} a_{mod(k+i,M+1)}\right)\right] \quad (6)$$

Здесь и далее обозначения в приложении Mathcad из-за специфической функции *mod*, которой не удалось найти аналог. Множества $\left\{\widetilde{a_i^R}(a,M) - \widetilde{a_i^L}(a,M)\right\}$ и $\left\{\widetilde{a_i^R}(a,M) + \widetilde{a_i^L}(a,M)\right\}$ являются фрактальными многообразиями, которые представляют собой первый построенный пример фрактального многообразия. Выражение для индекса связанности θ выглядит следующим образом:

$$\theta(a,M) = \frac{S(a,M)}{N(a,M)} = \frac{\sum_{i=0}^{M}\left(\widetilde{a_i^R}(a,M) - \widetilde{a_i^L}(a,M)\right)^2}{\sum_{i=0}^{M}\left(\widetilde{a_i^R}(a,M) + \widetilde{a_i^L}(a,M)\right)^2} \quad (7)$$

Как уже отмечалось, индекс связанности θ не имеет аналога в пространствах целочисленной размерности. Значение θ, в данном случае одномерного евклидова пространства, является новой геометрической характеристикой фрактала, называемой индексом связности и введенной для описания топологии фрактального множества [24]. Формула для связанности тестировалась в задачах сжатия изображений и распознавания образов в сфере информационных технологий в представлении *SNR*, отношение сигнала S к шуму N. Замкнутый контур в одномерном пространстве является ключевой особенностью в построении формулы для индекса связанности θ.

В большинстве задач, решаемых в измерительной технике, радиолокации, астрономии, оптической связи, локации, навигации, телевизионной автоматике и многих других весьма широких областях науки и техники, одной из основных и сложных проблем является проблема выбора количественного критерия (*SNR*) помехоустойчивости устройств, систем и комплексов. Представляет актуальность решение задачи определения объективного критерия распознавания сигналов и объектов при наличии шума или помех. Например, учитывая фрактальность сложных сигналов [28]. Отношение сигнала к шуму является фундаментальной концепцией в машинном обучении информационных технологий. Таким образом, ожидается перспективным применение формулы для связанности θ (7) к задачам отношения сигнал/шум *SNR*.

Отметим инвариантность формулы (7) от числа разбиений *M* для множеств значений функции Гаусса и Бесселя для достаточно больших значений *M*. Полученный результат устанавливает новый математический критерий для гауссовых данных, что является интересным свойством для применений в задачах *SNR*.

Существенным недостатком представления (5)–(7) для индекса связанности в квадратичной форме является возможность вычислений только в аналитическом виде для небольших по размеру наборов данных с произвольным значением q. Заметим для дальнейшего, что при $q = 0$ раскрывается неопределённость $0 / 0$ в формуле для *SNR*.

Приводятся без вывода формулы для θ в матричной форме:

$$\theta(\boldsymbol{a}, M) = \frac{(\boldsymbol{a} \times S\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a} \times N\boldsymbol{a})} \tag{8}$$

$$S = -q^2 \begin{pmatrix} matrix(M+1, M+1, f) - \\ -matrix(M+1, M+1, f)^T \end{pmatrix}^2; \tag{9}$$

$$N = q^2 \begin{bmatrix} 2identity(M+1) - \\ -\begin{pmatrix} matrix(M+1, M+1, f) + \\ +matrix(M+1, M+1, f)^T \end{pmatrix} \end{bmatrix}^2 \tag{10}$$

где:

$$f(i, j) = \frac{1-q}{1-q^{M+1}} q^{mod(j-i+M, M+1)}. \tag{11}$$

Формулы (8)–(11) эквивалентны формулам (5)–(7) и позволяют построить алгоритм обработки больших наборов данных в стандартных языках программирования.

В нулевом приближении значение q принимается равное нулю, а в следующих приближениях необходимо уже будет учитывать перенормировку $q(n)$.

$$\theta = S/N' \tag{12}$$

где

$$S = a_0(-a_{M-1} + 2a_0 - a_2) + a_1(-a_M + 2a_1 - a_3) + \\ + \sum_{i=2}^{M-2} a_i(-a_{i-2} + 2a_i - a_{i-2}) + a_{M-1}(-a_{M-3} + 2a_{M-1} - a_0) + \\ + a_M(-a_{M-2} + 2a_M - a_1); \tag{13}$$

$$N = a_0(a_{M-1} - 4a_M + 6a_0 - 4a_1 + a_2) + \\ + a_1(a_M - 4a_0 + 6a_1 - 4a_2 + a_3) + \\ + \sum_{i=2}^{M-2} a_i(a_{i-2} - 4a_{i-1} + 6a_i - 4a_{i+1} + a_{i+2}) + \\ a_{M-1}(a_{M-3} - 4a_{M-2} + 6a_{M-1} - 4a_M + a_0) + \\ a_M(a_{M-2} - 4a_{M-1} + 6a_M - 4a_0 + a_1); \tag{14}$$

Из определения индекса связанности θ следует инвариантность относительно любого линейного преобразования для a_i вида: $\widetilde{a_i} = ca_i + b$, значит, для индекса связанности θ будет выполняться требование инвариантности относительно линейного преобразования (1), а требование причинно-следственной инвариантности (2) уже заложено в механизм построения фрактального многообразия в виде замкнутого контура размерности *M* для шаблона. Для вычислений значений индекса связанности в таблицах предыдущего раздела статьи использовались формулы (12-14).

Значение данной статьи состоит не столько в концепции искусственного интеллекта в виде алгоритма превращения хаоса в порядок, не выделяя интеллект от подобных физических процессов *SOC* (сердцебиения, землетрясения и т.п.), сколько в математическом выводе и уникальных свойствах формулы (7) для связанности θ.

3. Метод фрактального многообразия

Основным результатом, на который опирается метод фрактального многообразия является инвариантность формулы (7) от числа гранулирования *M* для множества значений функции Гаусса.

Для полуволны $a_i = \sin\left(\pi \frac{i}{M}\right)$, используя в вычислениях предварительную аппроксимацию для достаточно больших значений *M*, выражение θ имеет вид:

$$S(M, q) \approx \frac{q^2(1-q)^4(1+q)^2}{M-3} 2\pi^2(1 + 4q + \cdots) \tag{15}$$

$$N(M, q) \approx \frac{q^2(1-q)^2(1+q)^2}{(M-3)^2} 2\pi^2(1 + 4q + \cdots) \tag{16}$$

и

$$\theta(M, q) = (1 - q(M))^2 (M-3) \tag{17}$$

Требование ренорм-инвариантности $\theta(M, q)$ которое приближает негауссовые данные к гауссовым:

$$\frac{d}{dM}\theta(M, q(M)) = 0 \tag{18}$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$q(M) = 1 - \sqrt{\frac{\mu}{M-3}} \tag{19}$$

Для больших значений M, асимптотика параметров длины фрактальных многообразий ((15), (16)) для полуволны имеет вид:

$$l^S \sim M^{-\frac{3}{2}} \text{ и } l^N \sim M^{-\frac{3}{2}} \tag{20}$$

Фрактальная размерность Хаусдорфа согласно Колмогорову для фрактальных многообразий, построенных с учетом направления прохождения замкнутого контура из M чисел, равна:

$$D = -\lim_{M\to\infty}\left[\frac{\ln(M)}{\ln(l_{min})}\right] = \frac{2}{3} \tag{21}$$

Таким образом, набор значений, принимаемых тригонометрическими функциями, образуют фрактальное многообразие размерности $D = 2/3$. Другими словами, во фрактальном пространстве $D = 2/3$ тригонометрические функции становятся гауссовыми.

Среднее значение как для гауссовых чисел:

$$\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M}\sin\left(\pi\frac{i}{M}\right)\right] = \frac{2}{\pi} \approx 0.64 \tag{22}$$

Отличается от среднего значения по Колмогорову для $D = 2/3$.

$$\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M}\left(\sin\left(\pi\frac{i}{M}\right)\right)^D\right]^{1/D} \approx 0.60 \tag{23}$$

Метод фрактального многообразия позволяет найти минимальную длину l_{min} в формуле (12) для определения фрактальной размерности с учётом (11) и сделать уточнение в вычислении среднего значения для $l^E \sim M^{-1}$. Полуволна в степени p, для целых p больше одного, порождает фрактальное многообразие размерностью $D = 2/5$, которое является наименьшим из обнаруженных измерений размерности фрактальных многообразий.

В качестве иллюстрации метода фрактального многообразия приводятся расчеты для биномиальных коэффициентов, близких к множеству Гаусса, нормированных на асимптотику:

$$a_i = 2^{-M}\sqrt{\frac{\pi M}{2}}\left[\frac{M!}{i!(M-i)!}\right] \tag{24}$$

Для достаточно больших значений M, асимптотика индекса связанности θ имеет вид:

$$S(M,q) \approx 3\pi\frac{q^2(1-q)^4}{\sqrt{2M+1}}(1+6q+\cdots) \tag{25}$$

$$N(M,q) \approx 9\pi\frac{q^2(1-q)^2(1+q)^2}{(2M+1)^{3/2}}(1+6q+\cdots) \tag{26}$$

$$\theta(M,q) \approx \frac{(1-q(M))^2}{(1+q(M))^2}\frac{(2M+1)}{3} \tag{27}$$

Ренормгрупповое уравнение $q(M)$:

$$q(M) = \frac{\sqrt{2M+1}-\sqrt{3\mu}}{\sqrt{2M+1}+\sqrt{3\mu}} \tag{28}$$

В результате, фрактальная размерность для биноминальных коэффициентов составляет $D = 4/5$, незначительно отличаясь от размерности множества точек функции Гаусса $D = 1$.

Метод фрактального многообразия позволяет точнее определить такую хорошо известную характеристику структуры, как среднее значение, используя в качестве инструмента меньший масштаб $l \sim M^{-\frac{3}{2}}$ (для тригонометрических функций) по сравнению с евклидовым масштабом $l^E \sim M^{-1}$ и идентифицировать качественно новую структурную характеристику — степень взаимной корреляции данных или степень коллективного состояния данных, определяемого индексом связанности θ.

Особенность обнаруженного свойства заключается в том, что не все характеристики дифференцируемых функций определяются исключительно бесконечно малой окрестностью. Эффект взаимной корреляции в ближних и дальних порядках проявляется на «микроуровне» ($l \sim M^{-\frac{3}{2}}$ для полуволны).

Таким образом, появление зависимости индекса связанности θ от числа гранулирования M для негауссовых данных объясняется характером взаимной корреляцией негауссовых данных в ближнем и дальнем окружении. Из приведённых в разделе примеров, взаимная корреляция негауссовых данных в меньшей степени, чем для множества данных функции Гаусса.

4. Широкий взгляд на принцип причинности

Применение правил причинно-следственной инвариантности (2) и формулы для связанности (7) может ещё не создавать барьер понимания в отношении модели с генератором случайных чисел. Вместе тем, подобное применение вряд ли окажется интуитивно понятным для экспериментальных значений магнитуды землетрясений или интенсивности в электрокардиограмме, то есть в отношении данных строго упорядоченных по внешней к процессу *SOC* шкале времени.

Принцип причинности — один из самых общих физических принципов, устанавливающий допустимые пределы влияния событий друг на друга. Эмпирически установленный принцип, справедливость которого неопровержима на сегодняшний день, но нет доказательств его универсальности. При этом неявно предполагается существование самого функционального подхода, способного хотя бы в принципе описывать влияние событий друг на друга.

Предлагается широкий взгляд на принцип причинности с привязкой к управляющим факторам, инициирующих сам процесс — если нет управляющих факторов, то нет и принципа причинности. Без привязки к управляющим параметрам не представляется возможным математически формализовать в функциональном подходе принцип причинности по отношению к процессу самоорганизации. Нарушение принципа причинности ограничено областью критичности. Как уже отмечалось, самоорганизованная критичность возникает при обнулении управляющего фактора [1]. Таким образом, нарушение принципа причинности допустимо ожидать в событиях при обнулении ключевого управляющего параметра в процессах *SOC* и исключительно в окрестности критичности.

Частое упоминание управляющего фактора, инициирующий процесс, обязывает сделать отсылку в область научного менеджмента — как в менеджменте рассматривается обнуление управляющего фактора. Иерархия создаёт порядок в стабильном внешнем окружении, а культура создаёт самоорганизацию без лидера в нестабильном внешнем окружении. Таким образом, нестабильное внешнее окружение соответствует обнулению управляющего фактора, что и приводит к самоорганизации, как это представлено в модели «циклов усиления» Джерри Джонсона [29] и показано в кейсе [30].

5. Выводы

Для процессов самоорганизованной критичности предложен альтернативный оптимизации метод топологических шаблонов, когда достижение критического состояния определяется не экстремумом целевой функции, а укладкой данных в топологические шаблоны. При этом привычный функциональный подход подменяется генератором случайных чисел, а неопределённость формализма причинно-следственной связи реализуется в правилах инвариантности (2), которые допускают создание топологических шаблонов.

Метод топологических шаблонов основан на формуле для новой физической характеристики процессов *SOC* — индекса связанности θ (12–14). Индекс связанности не имеет аналога в пространствах целой размерности, а на качественном уровне обратно пропорционален числу возможных степеней свободы в системе. Для приложений в сфере машинного обучения информационных технологий, измерительной технике, пеленга и локации, где существует проблема выбора объективного количественного критерия помехоустойчивости устройств, используется название *SNR*, отношение сигнала к шуму. Индекс связанности θ или *SNR* инвариантен относительно любых линейных преобразований исходных данных, а для дискретных множеств данных функций Гаусса и Бесселя не зависит от числа гранулирования.

В литературе по *SOC* традиционно обращается внимание только на лавинообразные участки пиковой связанности, то есть на участки минимальной энтропии. В расчётах найдены два сопряжённых участка критичности — пиковой связанности и релаксации.

Нарушение принципа причинности, а именно, инвариантность относительно выбора первоначального события, приводит к новой форме для набора случайных чисел в виде roll-матрицы с совпадающими по строкам и столбцам значениями индекса связанности. Перемножение roll-матриц, интерпретируемое как последовательность поворотов в пространстве причинно-следственных связей в неупругих столкновениях, приводит к детонации, взрывному росту критичности.

В предлагаемом подходе на вопрос «как из хаоса рождается порядок?» дается направление для ответа, опираясь на нарушение принципа причинности в отсутствии управляющих факторов. Приводится математический формализм взрывного роста числа критических или упорядоченных состояний из хаоса наборов случайных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gabrielli A, Caldarelli G, Pietronero L (December 2000). «Invasion percolation with temperature and the nature of self-organized criticality in real systems». Physical Review E. 62 (6 Pt A): 7638–7641.
2. P. Bak, How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality (Copernicus Springer-Verlag New York, New York, NY, USA, 1996).
3. H.J. Jensen, Self-Organized Criticality (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
4. G. Pruessner, Self-Organised Criticality (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012).
5. V. Frette, K. Christensen, A. Malthe-Srenssen, J. Feder, T. Jssang, and P. Meakin, Nature 379, 49 (1996).
6. K. Christensen, H. Flyvbjerg, and Z. Olami, Phys. Rev. Lett. 71(17), 2737 (1993).
7. B.D. Malamud, G. Morein, and D.L. Turcotte, Science 281, 1840 (1998).
8. B. Gutenberg and C.F. Richter, Seismicity Of The Earth And Associated Phenomena (Prince Ton University Press, Princeton, NJ, USA, 1949).
9. F.Y. Wang and Z.G. Dai, Nat. Phys. 9, 465 (2013), URL10.1038/nphys2670.
10. X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and H. E. Stanley, Nature 423, 267 (2003), URL 10.1038/nature01624.
11. R. Albert and A.-L. Barabasi, Rev. Mod. Phys. 74, 47 (2002).
12. D.R. Chialvo, Nat. Phys. 6, 744 (2010).
13. W.L. Shew and D. Plenz, Neuroscientist 19(1), 88 (2013), URL http://dx.doi.org/10.1177/1073858412445487
14. J.M. Beggs and N. Timme, Front. Physiol. 3, 163 (2012).
15. D. Stassinopoulos and P. Bak, Phys. Rev. E 51(5), 5033 (1995).
16. M. Usher, M. Stemmler, and Z. Olami, Phys. Rev. Lett. 74, 326 (1995).
17. J. M. Beggs and D. Plenz, J. Neurosci. 23(35), 11167 (2003).
18. Meisel, C., Storch, A., Hallmeyer-Elgner, S., Bullmore, E. & Gross, T. (2012) Failure of adaptive self-organized criticality during epileptic seizure attacks. PLOS Computational Biology 8, 1–8.
19. Mostafa Jannesari, Alireza Saeedi, Marzieh Zare, Silvia Ortiz-Mantilla. (2020) Stability of neuronal avalanches and long range temporal correlations during the first year of life in human infants. Brain Structure and Function 225:1169–1183
20. Arviv O., Goldstein A., Shriki O. Neuronal avalanches and time-frequency representations in stimulus-evoked activity // Scientific reports. 2019. N. 9(1). P. 1–14.
21. Courtiol J., Guye M., Bartolomei F., Petkoski S., Jirsa V. K Dynamical Mechanisms of Interictal Resting-State Functional Connectivity in Epilepsy // The Journal of Neuroscience. 2020. N. 40. P. 5572-5588.
22. Kadanoff, L.P. 1986, Fractals: Where's the Physics? Phys. Today 39(2), 6.
23. Milovanov, A.V. (1997) Topological proof for the Alexander-Orbach conjecture. Phys. Rev. E, 56, 2437–2446.
24. Зелёный Л.М., Милованов А.В., Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики, Успехи физических наук — 2004, №8, 809–852.
25. Isichenko M.B., (1992) «Percolation, statistical topography, and transport in random media». Mod.Phys, 64 , 961.
26. Alexander V.Milovanov, Jens Juul Rasmussen, Bertrand Groslambert (2021). Black swans, extreme risks, and the e-pile model of self-organized criticality, Chaos, Solitons & Fractals Volume 144, 110665.
27. Vladimirov, V.V., Vladimirova, E.V. (2020). Fractal manifold method in systems with self-organized criticality. International Journal of Engineering Research and Technology, 13 (11), 3835-3839.
28. Mukhamedov R.R., Utkin V.V., Voinov D.S. Method for detecting source noise signals of the radio emission based on fractal analysis. Software & Systems, 2021, vol. 34, no. 1, pp. 195–200 (in Russ.).
29. Johnson G., Whittington R., Regnér P. et. al. Exploring strategy. Pearson UK: Pearson Education Limited, 2020. 829 p.
30. Anita Williams Woolley, Christopher F. Chabris, Alex Pentland, Nada Hashmi, Thomas W. Malone. (2010). Evidence for a Collective Intelligence Factor in the Performance of Human Groups, Science. V. 330 P. 686–688.