

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНТЕЗАТОРА ЧАСТОТЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ ДЕТЕКТОРОМ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ФАЗОВЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF A MATHEMATICAL MODEL OF A FREQUENCY SYNTHESIZER WITH A PULSE FREQUENCY-PHASE DETECTOR USING PHASE SUBSPACES

**O. Antonovskaya
A. Besklubnaya**

Summary. In mathematical modeling of the dynamics of discrete phase synchronization systems, the complexity of the mathematical model is mainly related to the dimensionality of the problem and the design of the state space. Thus, the appropriateness of using one or another method of its study is dictated by considerations related to the simplicity of the method and the acceptable accuracy of the results obtained. Consistent application of the point mapping method allows us to approach with a sufficient degree of clarity not only the formation of mathematical models of discrete systems, but also the study of their dynamics. This paper presents the results of a study of the dynamics of a frequency synthesizer with a pulse frequency-phase detector using the point mapping method. The mathematical model under study uses three phase subspaces corresponding to the piecewise constancy of the control signal. Importance is given to the study of possible transitions of the system trajectory between subspaces. A complete qualitative study of the stationary movements of the mathematical model of the system is carried out.

Keywords: discrete phase synchronization system, frequency synthesizer, mathematical model, point mapping method, phase subspace.

Антоновская Ольга Георгиевна

кандидат физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
olga.antonovskaja@yandex.ru

Бесklubная Антонина Вячеславовна

кандидат педагогических наук, Федеральное
государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
antbesk@gmail.com

Аннотация. При математическом моделировании динамики дискретных систем фазовой синхронизации сложность математической модели связана, в основном, с размерностью задачи и конструкцией пространства состояний. Таким образом, целесообразность использования того или иного метода ее исследования диктуется соображениями, связанными с простотой применения метода и приемлемой точностью получающихся результатов. Последовательное применение метода точечных отображений позволяет с достаточной степенью наглядности подойти не только к формированию математических моделей дискретных систем, но и к исследованию их динамики.

В настоящей работе приводятся результаты исследования динамики синтезатора частоты с импульсным частотно-фазовым детектором методом точечных отображений. Исследуемая математическая модель использует три фазовых подпространства, соответствующих кусочному постоянству сигнала управления. Особое значение придается изучению возможных переходов траектории системы между подпространствами. Производится полное качественное исследование стационарных движений математической модели системы.

Ключевые слова: дискретная система фазовой синхронизации, синтезатор частот, математическая модель, метод точечных отображений, фазовое подпространство.

Введение

Ключевым моментом универсальной методики адекватного математического моделирования динамики систем синхронизации типа синтезаторов частот (СЧ), использующих принцип широтно-импульсной модуляции управляющего сигнала, является использование принципов моделирования динамики систем с переменной структурой [1], когда в условиях

постоянства сигнала управления возможно введение в рассмотрение динамического оператора изменения во времени состояния отдельно взятой подсистемы и анализ на этой основе условий перехода от одной подсистемы к другой. При этом особый интерес представляет последовательное применение метода точечных отображений [2], что позволяет не только более обоснованно подойти к процессу формирования математических моделей (ММ) синтезаторов частот, но и

расширить возможности качественного исследования их динамики [3,4].

В настоящей работе на примере рассмотрения СЧ с импульсным частотно-фазовым детектором [5] и фильтром нижних частот с идеальным астатизмом показывается, что изучение динамики СЧ по методу точечных отображений допускает полное качественное исследование стационарных движений математической модели системы. Математическая модель системы использует фазовые подпространства, соответствующие постоянству сигнала управления [6].

Математическая модель синтезатора частоты, использующая фазовые подпространства

Рассмотрим ММ СЧ с уравнениями [6]: при подключенном выходе детектора

$$\begin{aligned} \alpha \dot{\theta} &= g(x(\tau)), \quad (0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, u = \pm 1), \\ \mu \dot{x} &= u - x, \end{aligned} \quad (1)$$

и при отключенном выходе детектора на этапе хранения информации

$$\begin{aligned} \alpha \dot{\theta} &= g(x(\tau)), \quad (0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1), \\ x(\tau) &= x_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени τ , изменяющемуся в пределах периода сигнала ОГ; $0 < \mu < 1$ — астатизирующий параметр; α — показатель счетчика (С); u — выходной сигнал детектора; x — выходная координата фильтра; θ — координата С пустого при $\theta=0$ и заполненного при $\theta=1$; x_0 — начальное условие; $g(x) > 0$ — нормированная на единицу ($g(0)=1$) характеристика управляемого генератора (УГ).

При введении трех подпространств [6]: Π_1 , в котором определена система (1) с $u=+1$; Π_3 , в котором система (1) определена при $u=-1$, — и подпространство Π_2 , в котором определена система (2), — оказывается возможным сведение изучения перемещений изображающих точек движения (ИТД) через подпространства к рассмотрению свойств одномерного точечного отображения T .

Поскольку при таком подходе к моделированию динамики СЧ режимы работы детектора обусловлены свойствами фазовых траекторий в каждом из подпространств, а при переходе к случаю идеального астатизма ($\mu = +0$) в силу устойчивости (1) по быстрым движениям при $\mu = +0$ участков поверхности $x=u=const$ фазовая траектория возмущенного при $\mu \neq 0$ циклического движения располагается в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности невозмущенного движения [7], и при этом направление и величина мгновенного скачка по координате x при переходе траектории движения из одного подпространства в другое

определены однозначно, — постольку переход к изучению ММ СЧ пониженной размерности является обоснованным, что, в свою очередь, представляется возможность проведения полного качественного анализа динамики. Действительно [8], несложные исследования поведения ИТД с произвольными начальными условиями в подпространстве Π_1 и их дальнейшего продвижения через подпространство Π_2 с выходом в Π_3 позволяют установить, что связь между начальной и конечно точками такого движения описывается отображением

$$T_+ : \bar{x} = +1. \bar{\tau} = (\alpha / g(1))(m_1 + 2 - \theta_0) - m_1, \quad (3)$$

$$1 - (g(+1) / \alpha - 1)(1 + m_1) \leq \theta_0 \leq 1 - (g(+1) / \alpha - 1)m_1, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1(\theta_0) = \\ &= \text{ceil}(((\alpha / g(1))(2 - \theta_0) - 1) / (1 - (\alpha / g(1)))) \end{aligned} \quad (5)$$

Знак «ceil» означает операцию округления числа до целого в большую сторону. Величина m_1 в (3) определяет количество возвратных движений из Π_2 в Π_1 , возникающих в процессе движения ИТД. Аналогично находим, что процесс перемещения ИТД из подпространства Π_3 в подпространство Π_2 и далее в Π_1 описывается отображением

$$T_- : \bar{x} = -1. \bar{\theta} = (g(-1) / \alpha)(m_2 + 2 - \tau_0) - m_2, \quad (6)$$

$$1 - (\alpha / g(-1) - 1)(1 + m_2) \leq \tau_0 \leq 1 - (\alpha / g(-1) - 1)m_2, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} m_2 &= m_2(\tau_0) = \\ &= \text{ceil}(((g(-1) / \alpha)(2 - \tau_0) - 1) / (1 - (g(-1) / \alpha))) \end{aligned} \quad (8)$$

Величина $m_2(\tau_0)$ в (6) определяет количество возвратных движений из Π_2 в Π_3 .

Качественное исследование математической модели

Для простейшего случая, когда $2g(-1) < \alpha < g(+1) / 2$, т.е. $M_1=M_2=0$ ($M_1 = \max_{\theta_0} m_1(\theta_0)$, $M_2 = \max_{\tau_0} m_2(\tau_0)$), и, следовательно, графики функций соответствия отображений T_+ и T_- не имеют разрывов, совместная диаграмма графиков приведена на рисунке 1.

Из диаграммы рисунка 1 очевидна глобальная устойчивость единственной неподвижной точки с координатами $\tau_0 = \tau^*$ для отображения T_+ и $\theta_0 = \theta^*$ для отображения T_- . Диаграмма рисунка 1 существенно усложняется при появлении разрывов у отображений T_+ и T_- . Для установления системной связи между количеством раз-

рывов у отображений T_+ , T_- и характером пересечения их графиков необходимо конкретизировать вид функции $g(x)$. В случае линейной $g(x)=1+Sx$ таким системообразующим параметром является крутизна характеристики S .

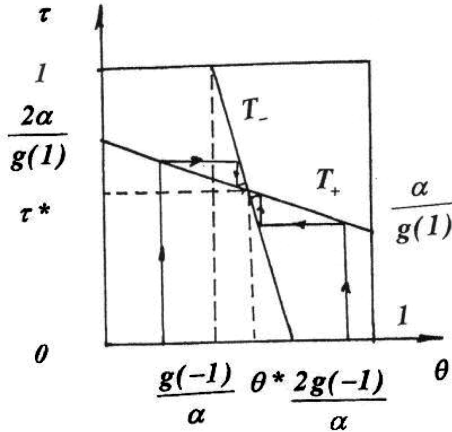


Рис. 1. Графики функций соответствия отображений T_+ и T_-

При $2g(-1) < \alpha < g(+1) / 2$,

Считая [6] M_1 и M_2 заданными числами, находим, что на плоскости $\alpha, S > 0$ уравнения границ областей существования определенного количества разрывов принимают вид: у отображения T_+

$$S = S(M_1) = -1 + ((M_1 + 2) / (M_1 + 1))\alpha \quad (M_1 = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

и у отображения T_-

$$S = S(M_2) = 1 - ((M_2 + 1) / (M_2 + 2))\alpha \quad (M_2 = 0, 1, \dots) \quad (10)$$

На плоскости $\alpha, S > 0$ в пределах границ управляемости $S \geq \alpha - 1$ ($\alpha \geq 1$), $S \geq 1 - \alpha$ ($\alpha \leq 1$) и условия $S < 1$ эквивалентного физическому условию $g(-1) > 0$ положительности частоты УГ, области с границами (9), (10) образуют два пересекающихся веера. Веер границ (9) с увеличением M_1 разворачивается относительно точки $(0, -1)$ вправо, веер с границами (10) разворачивается с увеличением M_2 относительно точки $(0, 1)$ также вправо. При $\alpha = 1$ границы (9), (10) пересекаются при условии $M_1 = M_2 + 1$, что непосредственно видно из рисунка 2 для некоторого начального количества M_1 и M_2 . Области, образованные границами (9), (10), на рисунке 2 пронумерованы двузначными числами, в которых первая цифра соответствует величине M_1 , а вторая — M_2 . При установленной классификации областей рисунку 1 соответствует параметрам α, S , принадлежащим области № 00. При переходе на плоскости α, S из области № 00 в область № 11 совместная диаграмма графиков для отображений T_+ и T_- принимает вид, приведенный на рисунке 3. Как следует из рисунка 3, появление разрывов у отображений T_+ и T_-

пока не повлияло на условия существования и устойчивости неподвижной точки с $\tau_0 = \tau^*, \theta_0 = \theta^*$.

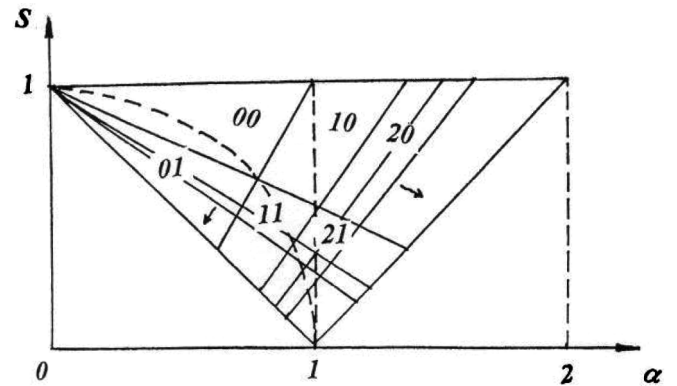


Рис. 2. Границы областей существования определенного количества разрывов

Переходя к общему анализу относительного расположения графиков функций соответствия отображений T_+ и T_- , необходимо отметить, что на плоскости α, S имеется геометрическое место точек

$$\alpha = \sqrt{1 - S^2} \quad (0 \leq S \leq 1), \quad (11)$$

на котором выполняется сразу два условия: первое — $M_1 = M_2 = M$, т.е. у графиков одинаковое число разрывов (если они есть), и второе условие — равенство величин интервалов, в которых располагаются графики T_+ и T_- в местах разрыва, т.е. обеспечивается полная симметричность диаграммы, как на рисунке 3. Кривая (11) на рисунке 2 изображена пунктиром и проходит через точку $(0, 8; 0, 6)$ пересечения границ с $M_1=0, M_2=0$. Для значений параметров, лежащих на кривой (11) в области № 00, хотя разрывов у графиков нет, но они располагаются симметрично относительно главной биссектрисы приблизительно так, как это показано на рисунке 1. Поскольку на кривой (11) в интервале $0, 8 \leq \alpha \leq 1$ величина α появления разрыва графиков для T_+ и T_- одинакова и определяется соотношением

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{1 - S}{1 + S}}, \quad (12)$$

постольку $\max_{\alpha} \alpha = \alpha(0, 6) = 0, 5$. При этом базовые интервалы непрерывности графиков увеличились настолько, что стали равными интервалу определения отображений T_+ и T_- соответственно, т.е. $0 \leq \theta_0 \leq 1$ для T_+ и $0 \leq \tau_0 \leq 1$ для T_- . Это имеет место, поскольку при $m_1 = m_2 = 0, \alpha = 0, 8, S = 0, 6$ значения θ_{op} и τ_{op} , соответствующие разрывам, становятся равными нулю.

Согласно рисунку 3 ближайшие точки разрывных частей графиков функций соответствия отображений T_+ и T_- имеют координаты для T_+

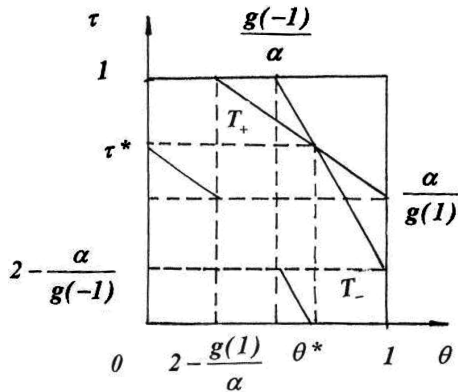


Рис. 3. Совместная диаграмма графиков для отображений T_+ и T_- в области № 11

$$\theta = \theta_{op}(m_1 = 0) = 2 - (g(1) / \alpha),$$

$$\tau = \alpha / g(1) \text{ и } T_- \text{ — } \theta = g(-1) / \alpha / ,$$

$$\tau = \tau_{op}(m_2 = 0) = 2 - (\alpha / g(-1)).$$

Рассмотрим разности координат указанных точек

$$\Delta_1 = \theta_{op}(m_1 = 0) - (g(-1) / \alpha) = 2 - (g(1) + g(-1)) / \alpha \quad (13)$$

$$\Delta_2 = \tau_{op}(m_2 = 0) - (\alpha / g(1)) = 2 - (\alpha(g(1) + g(-1)) / g(1)g(-1)) \quad (14)$$

Для случая линейной характеристики $g(x)$ из (13), (14) находим, что

$$\Delta_1 = 2(1 - (1 / \alpha)), \Delta_2 = 2(1 - (\alpha / (1 - S^2))). \quad (15)$$

Из (15) следует, что $\Delta_1 = 0$ при $\alpha = 1$ и $\Delta_2 = 0$ при $\alpha = 1 - S^2$.

На плоскости α, S границы $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$ не пересекаются, но имеют одну общую точку $\alpha = 1, S=0$, лежащую на стыке границ области управляемости СЧ (рисунок 2). За счет этого, как нетрудно удостовериться, случай $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ не реализуется. Но это, в свою очередь, означает, что пересечение графиков отображений T_+ и T_- возможно только трех типов. В первом случае пересекаются графики только в базовых интервалах непрерывности, т.е. так, как это показано на рисунке 3. Во втором случае при $m_1 \geq 1$ базовый участок непрерывности отображения T_- пересекается с графиком отображения T_+ в произвольном месте. И в третьем случае при $m_2 \geq 1$ график в базовом участке непрерывности отображения T_+ пересекается с графиком отображения T_- в произвольном месте. При всех трех указанных типах пересечения графиков возможно попадание графика базового участка непрерывности в разрыв графика сопредельного отображения, например, так, как это показано на рисунке 4, получающемся непрерывной трансформацией

рисунка 3. В этом случае простая неподвижная точка произведения отображений отсутствует, но существуют кратные циклы, переходящие на границах существования циклов всевозможной сложности в движения, устойчивые по Пуассону [9]. Для определения условий существования кратных циклов отображения T отметим, что на плоскости параметров α, S уравнения границ таких областей могут быть получены с помощью следующих простых рассуждений. Для отображения T_+ участок разрывности, лежащий между участками непрерывности с номерами m_1 и $m_1 \geq 1$ располагается на плоскости (θ, τ) между точками $(\theta_{op}(m_1), 1)$ и $(\theta_{op}(m_1), \alpha / g(1))$, и поэтому границы существования кратных циклов соответствуют условию прохождения графика базового участка непрерывности отображения T_- через указанные точки. Отсюда находим, что кратные циклы отображения $T = T_- T_+$, соответствующие вышеуказанному типу пересечения графиков отображений T_+ и T_- существуют в интервале $\underline{\alpha}_p(m_1) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_p(m_1)$, где

$$\bar{\alpha}_p(m_1) = \frac{2g(-1) + (1 + m_1)g(1)}{(2 + m_1)g(1) + g(-1)} g(1), \quad (16)$$

$$\underline{\alpha}_p(m_1) = \frac{(1 + m_1)g(1) + g(-1)}{2 + m_1}. \quad (17)$$

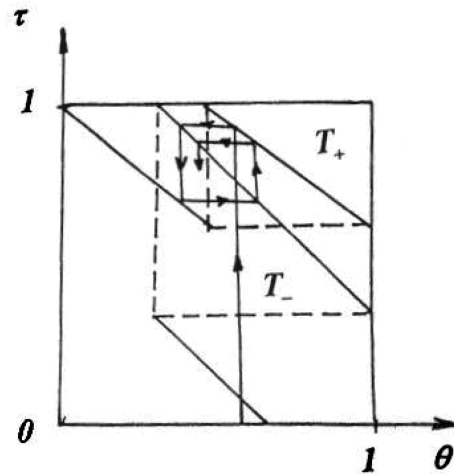


Рис. 4. Пересечение графиков отображений T_+ и T_- в общем случае

В качестве конкретного примера отметим, что для линейной $g(x)$ $\underline{\alpha}_p(m_1 = 0) = 1$,

$$\bar{\alpha}_p(m_1 = 0) = (3 - S)(1 + S) / (3 + S)$$

и $\max_S \Delta \alpha_0 = \bar{\alpha}_p(m_1 = 0) - \underline{\alpha}_p(m_1 = 0)$ достигается при $S=0,5$, при этом $\bar{\alpha}_p(m_1 = 0) = 1,07, \Delta \alpha_0 = 0,07$. Для следующего по номеру m_1 разрыва имеем $\underline{\alpha}_p(m_1 = 1) = 1 + (S / 3), \bar{\alpha}_p(m_1 = 1) = 2(1 + S) / (2 + S)$, причем $\max_S \Delta \alpha_0 = \bar{\alpha}_p(m_1 = 1) - \underline{\alpha}_p(m_1 = 1)$ достигается при $S=0,45$, при этом $\underline{\alpha}_p(m_1 = 1) = 1,15, \bar{\alpha}_p(m_1 = 1) = 1,18, \Delta \alpha_1 = 0,03$.

Для отображения T_+ участок разрывности, лежащий между участками непрерывности с номерами m_2 и $m_2 + 1$ располагается на плоскости (θ, τ) между точками $((g(-1) / \alpha), \tau_{op}(m_1))$ и $(1, \tau_{op}(m_1))$. Подставляя координаты этих точек в уравнение (3) при $m_1=0$, т.е. в уравнение базового участка непрерывности, находим, что соответствующий этому случаю интервал существования кратных циклов задается неравенством $\underline{\alpha}_p(m_2) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_p(m_2)$, где

$$\bar{\alpha}_p(m_2) = \frac{(2 + m_2)g(-1)g(+1)}{g(-1)(1 + m_2)g(+1)}, \tag{18}$$

$$\underline{\alpha}_p(m_2) = \frac{g(-1) + (2 + m_1)g(+1)}{2g(-1) + (1 + m_1)g(+1)} g(-1). \tag{19}$$

Для линейной $g(x)$ $\underline{\alpha}_p(m_2 = 0) = (3 + S)(1 - S) / (3 - S)$, $\bar{\alpha}_p(m_2) = 1 - S^2$, и $\max_S \Delta\alpha_0 = \bar{\alpha}_p(m_2 = 0) - \underline{\alpha}_p(m_2 = 0)$ достигается при $S=0,36$, при этом $\underline{\alpha}_p(m_2 = 0) \approx 0,81\bar{\alpha}_p(m_2 = 0) \approx 0,87, \Delta\alpha_0 = 0,06$.

Отметим ряд общих свойств поведения границ (14)–(17) на плоскости α, S . При $S=0$ $\underline{\alpha}_p(m_1) = \bar{\alpha}_p(m_1) = \underline{\alpha}_p(m_2) = \bar{\alpha}_p(m_2) = 1$ и, следовательно, на плоскости α, S при $S \rightarrow 0$ все интервалы существования кратных циклов сжимаются и сходятся в точку $(0,1)$. При $S=1$ $\underline{\alpha}_p(m_2) = \bar{\alpha}_p(m_2) = 0$, а $\underline{\alpha}_p(m_1) = \bar{\alpha}_p(m_1) = 2(1 + m_1) / (2 + m_1)$, т.е. при $m_1=0, 1, \dots$ образуют ряд $1; 4/3; 1,5; \dots$, сходящийся к значению $\alpha = 2$. Далее, поскольку $sign(\underline{\alpha}_p(m_1) - 1) = sign(Sm_1)$, а $sign(1 - \bar{\alpha}_p(m_2)) = signS$, области существования кратных циклов с индексом m_1 располагаются на плоскости α, S при $\alpha > 1$ (исключение составляет случай $m_1=0$, когда левая граница области с $m_1=0$ совпадает с линией $\alpha = 1, 0 \leq S \leq 1$), а области су-

ществования кратных циклов с индексом m_2 располагаются при $\alpha < 1$. Более того, поскольку $\partial\bar{\alpha}_p(m_1) / \partial m_1, \partial\underline{\alpha}_p(m_1) / \partial m_1 > 0$, а $\partial\bar{\alpha}_p(m_2) / \partial m_2, \partial\underline{\alpha}_p(m_2) / \partial m_2 < 0$, то при любом S с увеличением m_1 области существования циклов на плоскости α, S смещаются вправо, а с увеличением m_2 — влево, т.е. так, как это показано на рисунке 5.

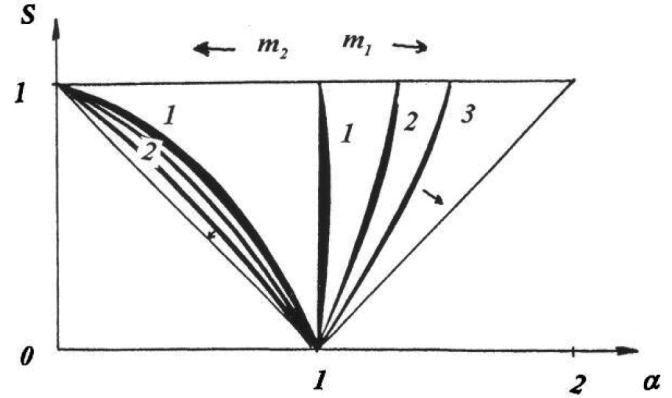


Рис. 5. Области существования циклов на плоскости α, S

Заключение

Наличие в динамике СЧ счетного множества поддиапазонов, в которых фаза появления управляющих импульсов модулирована циклами низкочастотной повторяемости означает, что принцип импульсного частотно-фазового детектирования, обеспечивая единственность и устойчивость предельной траектории в широком частотном диапазоне, в определенных поддиапазонах интервала управляемости предъявляет чрезвычайно жесткие условия к фильтрации низкочастотных составляющих спектра выходного сигнала УГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянов С. В., Уткин В. И. и др. Теория систем с переменной структурой. — М.: Наука, 1970. — 592 с.
2. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972. — 472 с.
3. Горюнов В. И. Исследование динамики системы управления с многопозиционной широтно-импульсной модуляцией. // Математическое моделирование и оптимальное управление: Вестник ННГУ. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. — Вып.1(26). — С.207–215.
4. Антоновская О. Г., Горюнов В. И. Об особенностях методики исследования динамики системы с широтно-импульсной модуляцией и запоминанием сигнала управления. // Вестник Нижегород. ун-та. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. — №6. — С. 135–140.
5. Левин В. А., В. Н. Малиновский, С. К. Романов. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. — М.: Радио и связь, 1989. — 232 с.
6. Антоновская О. Г., Бесклубная А. В. Построение математической модели синтезатора частоты с импульсным частотно-фазовым детектором, использующей фазовые подпространства. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. «Естественные и технические науки». — 2024. — № 8. — С. 61–66.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
8. Антоновская О. Г., Горюнов В. И. Разрывное точечное отображение прямой в прямую в динамике синтезаторов частот с импульсным частотно-фазовым детектированием. // Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. — 2014. — № 1. — С. 15–17.
9. Леонов Н. Н. О точечном преобразовании прямой в прямую. // Изв. Вузов. Радиопизика. — 1959. — № 6. — С. 943–956.

© Антоновская Ольга Георгиевна (olga.antonovskaja@yandex.ru); Бесклубная Антонина Вячеславовна (antbesk@gmail.com)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»