DOI 10.37882/2223-2966.2023.11.27

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯМЕ

## APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT METHODS TO THE NUMERICAL SOLUTION OF GENERALIZED LAME EQUATIONS

***T. Saltanova***

*Summary*. The article considers a system of equations of elliptic type. Using the energy product, we study the main properties of the generalized differential Lame operator, formulated in the form of analogues of the Betti and Clapeyron formulas. The practical application of the energy product for constructing a new finite element in the finite element method is indicated.

*Keywords*: Lame type equations, kinematic model of soil, water-saturated foundation, adapted finite element method.

***Салтанова Татьяна Викторовна***
*Доцент, Тюменский государственный университет*
*tsaltanova@mail.ru*

*Аннотация*. В статье рассматривается система уравнений эллиптического типа. С помощью энергетического произведения исследуются основные свойства обобщенного дифференциального оператора Ляме, сформулированные в виде аналогов формул Бетти и Клапейрона. Указывается практическое приложение энергетического произведения для построения нового конечного элемента в методе конечного элемента.

*Ключевые слова*: уравнения типа Ламе, кинематическая модель грунта, водонасыщенное основание, адаптированный метод конечных элементов.

Моделирование поведения нагруженного двухфазного тела, например, водонасыщенного грунта, в стабилизированном состоянии, не зависящем от времени, привело к новой системе эллиптических уравнений типа Ляме [1]. В каждом уравнении новой системы имеются дополнительные слагаемые, отражающие влияние жидкой фазы на твердую с помощью старшей и младшей производных. Объединение одноименных старших производных соответствует обобщенной записи закона Гука для твердой фазы, в которой к первым трем диагональным элементам тензора четвертого ранга, описывающего модули упругости изотропной среды, добавились новые слагаемые, отражающие изменения механических свойств твердой фазы за счет наличия в ее порах свободной и рыхлосвязанной несжимаемой жидкости, оставшейся после окончания процесса консолидации. Диагональные слагаемые отличаются от слагаемых, которые использовал М. Био [2] в физических уравнениях для минеральных частиц, наделяя жидкость свойством объемной сжимаемости. Для исследования значимости младших производных, которые отсутствуют в уравнениях Ляме и в классификационном признаке деления дифференциальных уравнений в частных производных на классы, применено энергетическое произведение для нового дифференциального оператора. В качестве приложения энергетического произведения указана возможность построения нового конечного элемента, на основе которого метод конечного элемента (МКЭ) адаптируется для решения обобщенной системы уравнений Ляме.

Для описания напряженно-деформированного состояния двухфазного тела после окончания процесса консолидации относительно перемещений твердой фазы $u_j$ получена система дифференциальных уравнений второго порядка с положительными постоянными коэффициентами $G$, $\lambda$, $b_i$, $c_i$ ($i$ = 1,2,3), описывающими механические свойства (модуль сдвига, постоянная Ляме) твердой (индекс опущен) и жидкой (индекс $l$) фаз [1]:

$$D_{ij}u_j = F_i,\ b_i = \frac{E_{li}}{\aleph_i^2},\ c_i = \frac{E_{li}}{h_i\aleph_i}, \quad (1)$$

$$D_{ij} = -\Big(\big(G + \lambda + b_i\delta_{ij}\big)\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k + c_i\delta_{ij}\partial_j\Big),$$

в которой $F_i$ — компоненты объемных сил. Представим $\boldsymbol{D}$ в виде $\boldsymbol{D} = -(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$.

Через $\boldsymbol{A}$ обозначен оператор Ляме

$$A_{ij} = (G + \lambda)\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k;$$

дифференциальные операторы $B_{ij} = b_i\delta_{ij}\partial_i\partial_j$, $C_{ij} = c_i\delta_{ij}\partial_j$ описывают разгружающее влияние жидкой фазы. Дополним уравнения смешанными неоднородными краевыми условиями

$$u_i\big|_{S_1} = 0,\ t_{ij}u_j\big|_{S_2} = q_i, \quad (2)$$

$$t_{ij} = \lambda n_i\partial_j + \big(G + b_i\delta_{ij}\big)n_j\partial_i + G\delta_{ij}n_k\partial_k,$$

$t$ — оператор внутренних напряжений в скелете. Заданная нагрузка $q_i$ приложена к поверхности тела с дренирующим покрытием, на котором нормальные поровые давления отсутствуют, $n$ — внешняя нормаль к поверхности $S = S_1 + S_2$.

Дальнейшие построения связаны с энергетическим произведением ($\boldsymbol{Du,u}$). Знак «минус» перед суммой операторов введен потому, что положительно определенным является отрицательный оператор $\boldsymbol{D}$. Через энергетические произведения операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ будут записаны аналоги формул Бетти и Клапейрона, характеризующие основные свойства обобщенного оператора Ляме. В заключение выражение ($\boldsymbol{Du,u}$) = ($\boldsymbol{F,u}$) используется для построения нового конечного элемента в МКЭ.

Энергетическое произведение ($\boldsymbol{Du,u'}$) представим в виде суммы трех слагаемых. Для преобразования объемных интегралов применяется формула Остроградского. Первое слагаемое известно [3]:

$$\left(-\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u}'\right) = -\int_V u'_i A_{ij} u_j dV =$$
$$= 2\int_V W^A\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) dV - \int_S u'_i l_{ij} u_j dS'$$
$$W^A\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = W^A\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right),$$
$$l_{ij} = \lambda n_i \partial_j + G n_j \partial_i + G\delta_{ij} n_k \partial_k'$$

в котором $W^A$ — упругий потенциал для изотропного скелета при $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$:

$$W^A(u) = \frac{1}{2}\left(\lambda\theta^2 + 2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right),\ \theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}.$$

Два оставшихся слагаемых имеют вид [4]:

$$\left(-B\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = -\int_V u'_i B_{ij} u_j dV =$$
$$= 2\int_V W^B\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) dV - \int_S b_i u'_i \delta_{ij} n_j \partial_i u_j dS$$
$$\left(-C\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = -\int_V u'_i C_{ij} u_j dV = \qquad (3)$$
$$= \int_V W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) dV = -\frac{1}{2}\int_S c_i u'_i \delta_{ij} u_j n_i dS'$$
$$W^B\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = \frac{1}{2} b_i \varepsilon_{ii} \varepsilon'_{ii},\ W^B\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = W^B\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right),$$
$$W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = -c_i \varepsilon_{ii} u'_i,\ W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) \neq W^C\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right).$$

Форма $W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right)$ не обладает свойством коммутативности аргументов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$.

В приложениях под областью $\boldsymbol{V}$ будем рассматривать часть полупространства, нижняя граница $S_1$ которого описывается сферой большого конечного радиуса, а на дневной границе $S_2$ направляющие косинусы внешней нормали отрицательны и одновременно в ноль не обращаются. При $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$ объемный интеграл от $W^C$ в (3) положителен.

Аналог первой формулы Бетти описывается энергетическим произведением

$$\int_V u'_i D_{ij} u_j dV =$$
$$= 2\int_V \left( W^A\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) + W^B\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) + \frac{1}{2} W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right)\right) dV -. \qquad (4)$$
$$-\int_S u'_i t_{ij} u_j dS$$

Полагая $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$, получим аналог второй формулы Бетти

$$\int_V u_i D_{ij} u_j dV = 2\int_V \left( W^A + W^B + \frac{1}{2} W^C \right) dV - \qquad (5)$$
$$-\int_S u_i t_{ij} u_j dS$$

Опишем несимметричность энергетического произведения. Вычитая из (4) взаимное выражение, получим аналог третьей формулы Бетти

$$\int_V \left(u'_i D_{ij} u_j - u_i D_{ij} u'_j\right) dV =$$
$$= \int_V \left(W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) + W^C\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right)\right) dV -. \qquad (6)$$
$$-\int_S \left(u'_i t_{ij} u_j - u_i t_{ij} u'_j\right) dS$$

Как уже было отмечено, выражение ($W^A + W^B$) является однородной функцией второй степени, поэтому

$$W^A\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) + W^B\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) = W^A\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right) + W^B\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right),$$

и при вычитании они сократились.

Для вывода следствия из формулы (6) рассмотрим задачу (1) со смешанными граничными условиями (2). Тогда имеем

$$\int_V \left(u'_i F_i - u_i F'_i\right) dV - \int_{S_2} \left(u'_i q_i - u_i q'_i\right) dS = \qquad (7)$$
$$= \int_V \left(W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) - W^C\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right)\right) dV$$

Пусть в теле отсутствуют объемные силы и в некоторых точках поверхности $M_0(\boldsymbol{y}_0)$, $M_1(\boldsymbol{y}_1)$ действуют сосредоточенные силы, которые вводятся с помощью дельта-функции,

$$\boldsymbol{q}\left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{Q}\delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_0\right),\ \boldsymbol{q}'\left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{Q}'\delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_1\right).$$

Тогда из формулы (7) следует

$$\boldsymbol{u}'\left(\boldsymbol{y}_0\right) \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{y}_0\right) \cdot \boldsymbol{Q}' + \int_V \left(W^C\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\right) - W^C\left(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\right)\right) dV. \qquad (8)$$

По теореме о взаимности работ для упругого тела имеем

$$\boldsymbol{u}'\left(\boldsymbol{y}_0\right) \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{y}_0\right) \cdot \boldsymbol{Q}'.$$

Итак, теорема о взаимности работ (в смысле упругого тела) для двухфазного тела не выполняется из-за наличия физического постулата [1] для жидкой фазы, который привел к возникновению билинейных форм $W^C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')$ и $W^C(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u})$.

Преобразуем выражение (5) на основе уравнений (1) и получим аналог формулы Клапейрона

$$\int_V u_i F_i dV + \int_S u_i q_i dS = 2\int_V \left( W^A + W^B + \frac{1}{2} W^C \right) dV,$$

из которого следует, что работа внешних объемных и поверхностных сил затрачена на сообщение двухфазному телу внутренней энергии деформации, которая возвращается в виде работы при постепенном разгружении. Объемный интеграл от $W^C$, согласно формуле (3) положителен, выражение $W^C$ является однородной функцией первой степени относительно линейных деформаций $\varepsilon_{ii}$. Подъинтегральное выражение справа описывает разложение внутренней энергии деформации по однородным функциям первой и второй степеней, отвечающим жидкой и твердой фазам.

При отсутствии объемных сил по теореме Клапейрона для упругого тела имеем однородную функцию $W^A(\boldsymbol{u})$ второй степени

$$2\int_V W^A(\boldsymbol{u}) dV = \int_S u_i q_i dS.$$

## Заключение

Укажем на то, что умноженные скалярно уравнения (1) на вектор возможных перемещений $\boldsymbol{u}$ приводят к выражению (***Du,u***) = (***F,u***), которое следует трактовать (по принципу Лагранжа) как сумму работ для области $V$. Энергетическое произведение (***Du,u***) описывает работу внутренних сил, а скалярное произведение (***F,u***) — работу внешних сил. Например, для известного оператора Ляме ***A*** имеем для каждого конечного элемента $V_i$ [5]:

$$\int_{V_i} \left( \lambda\theta^2 + 2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \right) dV - \int_{S_i} q_i u_i dS = \int_{V_i} K_i u_i dV,$$

где интегралы слева равны выражению (***Au,u***), поверхностный интеграл имеет место в случае, если элемент $V_i$ является граничным (в дальнейшем поверхностный интеграл будет опущен). Интеграл справа описывает работу заданных объемных сил ***K***. Поскольку МКЭ является численным методом, то требуется матричная запись каждого слагаемого, которая известна [5]

$$\int_{V_i} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV = \int_{V_i} \{K\}^T \{u\} dV,$$

индекс $T$ означает операцию транспонирования, фигурные скобки — матрицу-столбец. Матрица Гука [$C$] (тензор четвертого ранга) имеет вид

$$[C] = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & 2G & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 2G & \lambda + 2G & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 2G & 2G & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{pmatrix}$$

После преобразований получается [5] матричная запись

$$[k]\{a\} \equiv \{X\},\ \{X\} \equiv \int_{V_i} [N]^T \{K\} dV,$$

в которой [$k$] называется матрицей жесткости. Согласно методу конечного элемента за искомые элементы матрицы-столбца {$a$} принимаются узловые перемещения конечного элемента. Например, для плоского треугольного элемента узлы совпадают с вершинами треугольника и дополнительно могут вводиться узлы в средних точках сторон. Искомый вектор {$a$} состоит из $N$ блоков, каждому из которых отвечает $n$-мерный вектор узловых перемещений. Вводится согласование перемещений в узлах, принадлежащих сразу нескольким элементам. Перемещения внутри конечных элементов с помощью матрицы [$N_l$] записываются через матрицу-столбец {$a$} узловых перемещений $\{u\} = \sum_{l=1}^{N} [N_l] a_l$.

Для обобщенной системы уравнений Ляме при описании работы внутренних сил имеем три слагаемых (***Au,u***) + (***Bu,u***) + (***Cu,u***) = (***F,u***) или

$$2\int_{V_i} \left( \lambda\theta^2 + 2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \right) dV + 2\int_{V_i} b_i \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\delta_{ij} dV + (\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{u}) = \\ = \int_{V_i} F_i u_i dV - \int_{S_i} q_i u_i dS .$$

Второй объемный интеграл объединяется с первым, так как подъинтегральные выражения обладают свойством квадратичной формы, что приводит к изменению матрицы Гука:

$$[C_{A+B}] = \\ = \begin{pmatrix} \lambda + 2G + b_1 & 2G & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 2G & \lambda + 2G + b_2 & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 2G & 2G & \lambda + 2G + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{pmatrix}.$$

После изменения матрицы Гука отличие двухфазного конечного элемента от однофазного описывается энергетическим произведением (***Cu,u***), которое надо записать в матричном виде для одного конечного элемента и представить в виде новой матрицы жесткости. Новую матрицу жесткости надо сложить с известной матрицей жесткости, отвечающей энергетическому произведению (($\boldsymbol{A}$ + $\boldsymbol{B}$)$\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}$), для одного конечного элемента. Формирование блочной матрицы жесткости для совокупности конечных элементов осуществляется по известному для энергетического произведения оператора Ляме правилу.

Таким образом, энергетическое произведение ($\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{u}$) описывает правило построения нового матричного слагаемого к известной матрице жесткости одного конечного элемента. Правило построения блочной матрицы жесткости для совокупности конечных элементов известно.

ЛИТЕРАТУРА


1. Мальцев Л.Е., Бай В.Ф., Мальцева Т.В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. — Спб.: Стройиздат, 2002, 320 с.
2. Biot M.A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. Journal of Applied Physics, 27, № 5, 459–467 (1956).
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М., 1957, 476 с.
4. Мальцева Т.В. Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ляме. // Вестник ТГУ. — 2003. — № 5. С.196–201.
5. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Изд-во МГУ,1981. — 344 с.



Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»