DOI 10.37882/2223–2966.2021.01.23

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРИДОРА ОЖИДАЕМОЙ ДОХОДНОСТИ РИСКОВОГО АКТИВА ПРИ ИЗВЕСТНОМ ПОРЯДКЕ СКУПКИ АКЦИЙ

Никоненко Наталья Дмитриевна
К.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации» Южно-Российский институт управления — филиал
natdniko@mail.ru

DETERMINATION OF THE EXPECTED RETURN CORRIDOR OF A RISKY ASSET WITH A KNOWN PROCEDURE FOR BUYING SHARES

N. Niconenko

Summary. The article discusses the approach to determining the expected profitability of a risky asset, if the procedure for buying up shares is known. A class of models is investigated that depends on indicators of buying and rising, falling or unchanged stock prices. In the case of a known purchase order, one of the indicators is definite. Methods for calculating the mathematical expectation and variance are used to calculate the expected yield corridor. A covariance matrix is used to determine the variance.

An estimate was obtained for the corridor of expected profitability P {An} ≥1-α, where α is the level of significance that is specified; α is a (usually small) number. The coefficient k depends on the significance level α: k = k (α). The parameter k (α) is found programmatically, using numerical methods of integration and solving the equation, namely the Simpson method and Newton's method, respectively.

Keywords: risky asset; expected return; the expected yield corridor; martingale measure; conditional mathematical expectation; covariance matrix.

Аннотация. В статье рассматривается подход определения ожидаемой доходности рискового актива, в том случае, если известен порядок скупки акций. Исследуется класс моделей, зависящий от индикаторов скупки и роста, падения или неизменности цены акции. В случае известного порядка скупки один из индикаторов является определенным. Для вычисления коридора ожидаемой доходности используется методы вычисления математического ожидания и дисперсии. Для определения дисперсии используется ковариационная матрица.

Получена оценка для коридора ожидаемой доходности P{An}≥1–α, где α — уровень значимости, который задаётся; α — (обычно малое) число. Коэффициент k зависит от уровня значимости α: k=k(α). Параметр k(α) находится программным путём, используя численные методы интегрирования и решения уравнения, а именно метод Симпсона и метод Ньютона соответственно.

Ключевые слова: рисковый актив; ожидаемая доходность; коридор ожидаемой доходности; мартингальная мера; условное математическое ожидание; матрица ковариаций.

Введение

Рассмотрим класс моделей неполного рынка, который можно представить как расширение модели Кокса–Росса — Рубинштейна. Допущением модели является присутствие в портфеле акций (рискового актива) одного вида. Рисковый актив может как случайным образом появляться на рынке, так и исчезать. Кроме того, курс может оставаться неизменным, то есть акция приобретает черты банковского счета. Определим индикаторы скупки после появления и исчезновения акции с рынка. В данном случае индикатором будет выступать последовательность бинарных случайных величин, имеющих одинаковое распределение. $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, где $\omega_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,N}$, N-финальный момент времени. Если значение индикатора равно нулю, тогда скупка акции происходит после её роста, иначе, скупка начинается после падения акции. Определим индикаторы роста и падения акции:

$$\delta_i = \{0,1\},\ \rho_i = \begin{cases} a, \delta_i = 0 \\ b, \delta_i = 1 \end{cases}.$$

Если $\delta_i = 1$, то акция растет. Если $\delta_i = 0$, то акция падает. Получаем две последовательности индикаторов, которые являются независимыми, и тогда фильтрация имеет вид: $F_n = F_n^{\delta} \times F_n^{\omega}$. Тогда стоимость рискового актива будет эволюционировать по закону:

$$S_n = S_{n-1}(1+r)^{1-\delta_{n-1}}(\text{К}_n),$$

$$K_n = (1+a)^{(1-д_n)д_{n-1}}(1+b)^{д_n д_{n-1}}щ_n + \\ + (1+b)^{(1-д_n)д_{n-1}}(1+a)^{д_n д_{n-1}}(1-щ_n). \qquad (1)$$

Параметр a– означает, что акция падает; b — означает, что акция растет; r — указывает на то, что акция ведет себя как банковский счет,$—1 < a < r < b$-должно выполняться, цена акции в начальный момент времени S_0 известна.

Допущение модели: $щ = (щ_i)_{i=1}^n$ неизвестна, и для упрощения модели интегрируем цену акции по щ, получим:

$$E_щ(S_n) = ES_{n-1}(1+r)^{1-д_{n-1}}\left(\widehat{К}_n\right),$$

где

$$\widehat{К}_n = (1+a)^{(1-д_n)д_{n-1}}(1+b)^{д_nд_{n-1}}\tilde{g} + \\ + (1+b)^{(1-д_n)д_{n-1}}(1+a)^{д_nд_{n-1}}\tilde{h},$$

$$\tilde{g} = P(щ_n = 1), \tilde{h} = P(щ_n = 0), \tilde{g} + \tilde{h} = 1.$$

Теперь будем рассматривать цену акции (рисковый актив) в виде:

$$\hat{S}_n = \hat{S}_{n-1}(1+r)^{1-д_{n-1}}\left(\widehat{К}_n\right), n = 1\ldots, N,$$

$$\widehat{К}_n = (1+a)^{(1-д_n)д_{n-1}}(1+b)^{д_nд_{n-1}}\tilde{g} + \\ + (1+b)^{(1-д_n)д_{n-1}}(1+a)^{д_nд_{n-1}}\tilde{h} \qquad (2)$$

Положим $\delta_0 = 1$.

Банковский счет эволюционирует по следующему закону:

$$B_n = (1+r)B_{n-1} = B_0(1+r)^n \qquad (3)$$

Таким образом, будем рассматривать параметризованный класс моделей неполного рынка, причем параметрами являются $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$, которые связаны соотношением $\tilde{g} + \tilde{h} = 1$.

Материалы и методы

Для определения коридора ожидаемой доходности необходимо выяснить существует ли мартингальная мера, и, в случае существования, определить ее. В данном случае основным инструментом является мартингальное равенство:

$$E\left(\frac{\hat{S}_n}{B_n}\Big/F_{n-1}\right) = \frac{\hat{S}_{n-1}}{B_{n-1}},$$

$$\frac{\hat{S}_{n-1}}{B_{n-1}}\left(\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n}\Big/F_{n-1}\right)\tilde{g} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n}\Big/F_{n-1}\right)\tilde{h}\right) = \frac{\hat{S}_{n-1}}{B_{n-1}} \qquad (4)$$

Итак, основным инструментом является вычисление условных математических обязательств.

Литературный обзор

Рассмотрим основной инструментарий стохастической финансовой математики. Заметим, что теория арбитража является ключевой для производных финансовых инструментов. К производным финансовым инструментам относятся: опционы, свопы, варранты, фьючерсы (подробнее [1]). Опцион представляет сбой финансовое обязательство. С экономической точки зрения, это то, количество денег, которое запланировали получит в момент его реализации по результатам ведения портфеля ценных бумаг. Ключевыми понятиями для анализа, в том числе и экономического, являются полнотыи безарбитражности. Они определены в первой и второй фундаментальных теоремах финансовой математики, подробнее о теоремах в работе [2, С. 15, С. 19].

Для теории арбитража необходимо, чтобы был известно распределение процесса цены и текущего значения цены, имеющихся на рынке активов. Отсюда, теория арбитража широко применима для практических расчетов. Для того, чтобы модель была применима необходимо проверить, чтобы выполнялось условие безарбитражности. Таким образом, это условие является ключевым.

Определим мартингальную меру, если известен порядок скупки акций.

Рисковый актив изменяется по закону (1). Допустим, что последовательность $щ_1, щ_2, \ldots, щ_N$ нам известна. Тогда перепишем формулу (1) в виде

$$S_n = S_{n-1}(1+r)\left(\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_n\delta_{n-1}}\omega_n + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}}\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_n\delta_{n-1}}(1-\omega_n)\right) \qquad (5)$$

Для определения мартингальной меры воспользуемся мартингальным равенством. Тогда, получим:

$$\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n}|F_{n-1}\right)\omega_n +$$

$$+\left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n}|F_{n-1}\right)(1-\omega_n) = 1$$

Рассмотрим два случая:

1. $д_{n-1} = 0$
2. $д_{n-1} = 1$

Рассмотрим случай $д_{n-1} = 0$:

$$\left(\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right)\omega_n + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right)(1-\omega_n)\right) I_{\{\delta_{n-1}=0\}} =$$

$$= 1 I_{\{\delta_{n-1}=0\}}$$

Рассмотрим два случая:

1.1) $щ_n = 0$.

Отсюда, получим:

$$\left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right) I_{\{\delta_{n-1}=0\}} = 1 I_{\{\delta_{n-1}=0\}}.$$

Возможны две ситуации: $д_n = 0$ и $д_n = 1$.

Откуда, находим:

$$P_0(д_n = 1 | д_{n-1} = 0) = K_n, 0 \le K_n \le 1$$
$$P_0(д_n = 0 | д_{n-1} = 0) = 1 - K_n$$

1.2) $щ_n = 1$

$$\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right) I_{\{\delta_{n-1}=0\}} = 1 I_{\{\delta_{n-1}=0\}}$$

Возможны две ситуации: $д_n = 0$ и $д_n = 1$.

Откуда, находим:

$$P_1(д_n = 1 | д_{n-1} = 0) = K_n, 0 \le K_n \le 1$$

$$P_1(д_n = 0 | д_{n-1} = 0) = 1 - K_n$$

Итак, получим:

$$P(д_n = 1 | д_{n-1} = 0) = K_n, 0 \le K_n \le 1$$

$$P(д_n = 0 | д_{n-1} = 0) = 1 - K_n$$

K_n- предсказуемая случайная последовательность, т.е $K_n \in F_{n-1}$, поскольку мы обозначили через K_n условную вероятность $P(д_n = 1 | д_{n-1} = 0) = K_n$, а $д_{n-1} \in F_{n-1}$.

2) Рассмотрим случай $д_{n-1} = 1$:

$$\left(\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right)\omega_n + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right)(1-\omega_n)\right) I_{\{\delta_{n-1}=1\}} =$$

$$= 1 I_{\{\delta_{n-1}=1\}}$$

Рассмотрим два случая:

2.1) $щ_n = 0$.

Отсюда, получим:

$$\left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right) I_{\{\delta_{n-1}=1\}} = 1 I_{\{\delta_{n-1}=1\}}.$$

Возможны две ситуации: $д_n = 0$ и $д_n = 1$.

Отсюда, получаем:

$$P_0(д_n = 1 | д_{n-1} = 1) = \frac{r-b}{a-b}$$
$$P_0(д_n = 0 | д_{n-1} = 1) = \frac{a-r}{a-b}$$

2.2) $щ_n = 1$.

Отсюда, получим:

$$\left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{\delta_{n-1}} E\left(\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\delta_{n-1}\delta_n} \middle| F_{n-1}\right) I_{\{\delta_{n-1}=1\}} = 1 I_{\{\delta_{n-1}=1\}}.$$

Возможны две ситуации: $д_n = 0$ и $д_n = 1$.

Отсюда, получаем:

$$P_1(д_n = 1 | д_{n-1} = 1) = \frac{r-a}{b-a}$$
$$P_1(д_n = 0 | д_{n-1} = 1) = \frac{b-r}{b-a}.$$

Таким образом, получаем:

$$P(д_n = 1 | д_{n-1} = 1) = \frac{r-a}{b-a} щ_n + \frac{r-b}{a-b}(1 - щ_n)$$

$$P(д_n = 0 | д_{n-1} = 1) = \frac{b-r}{b-a} щ_n + \frac{a-r}{a-b}(1 - щ_n)$$

Итак, получили семейство мартингальных мер:

$$p_n^* = K_n I_{\{\delta_{n-1}=0\}} + \left(\frac{r-a}{b-a}\omega_n + \frac{r-b}{a-b}(1-\omega_n)\right) I_{\{\delta_{n-1}=1\}}$$

$$q_n^* = (1-K_n) I_{\{\delta_{n-1}=0\}} + \left(\frac{b-r}{b-a}\omega_n + \frac{a-r}{a-b}(1-\omega_n)\right) I_{\{\delta_{n-1}=1\}} \quad (6)$$

Таким образом, получили меру, которая является случайной величиной.

Согласно первой фундаментальной теореме финансовой математики — рынок безарбитражен. По второй фундаментальной теореме финансовой математики, получаем что рынок не полон.

Теперь определим коридор ожидаемой доходности при известной скупке. Будем считать, что последовательность

$$\omega = (\omega_i)_{i=1}^n$$

нам известна.

Перепишем формулу для цены акции (2) в виде:

$$S_n = S_0(1+r)^{n-\sum_{i=1}^n \delta_{i-1}} \left((1+a)^{\sum_{i=1}^n (1-\delta_i)\delta_{i-1}} (1+b)^{\sum_{i=1}^n \delta_i \delta_{i-1}} \omega_i + \right.$$

$$\left. + (1+b)^{\sum_{i=1}^n (1-\delta_i)\delta_{i-1}} (1+a)^{\sum_{i=1}^n \delta_i \delta_{i-1}} (1-\omega_i) \right) \qquad (7)$$

Определим доходность:

$$r_n = \frac{S_n - S_0}{S_0} = \frac{S_n}{S_0} - \frac{S_0}{S_0} = \frac{S_n}{S_0} - 1$$

$$r_n = (1+r)^{n-\sum_{i=1}^n \delta_{i-1}} \left(\prod_{i=1}^n \left((1+a)^{(1-\delta_{i-1})\delta_i} (1+b)^{\delta_{i-1}\delta_i} \omega_i + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (1+b)^{(1-\delta_{i-1})\delta_i} (1+a)^{\delta_{i-1}\delta_i} (1-\omega_i) \right) \right) - 1 \qquad (8)$$

Рассмотрим коридор ожидаемой доходности:

$$I_k = Er_n \pm k\sqrt{Dr_n}$$

Таким образом, ожидаемая доходность должна лежать в отрезке:

$$Er_n - k\sqrt{Dr_n} \le r_n \le Er_n + k\sqrt{Dr_n} \qquad (9)$$

Будем считать, что r_n мало, тогда выполняется соотношение $\ln(1+r_n) \approx r_n$ (a), а, значит, $E(\ln(1+r_n)) \approx E(r_n)$ (b).

Найдем математическое ожидание Er_n.

Сначала прологарифмируем соотношение (8), получим:

$$\ln(1+r_n) = \ln\left((1+r)^{n-\sum_{i=1}^n \delta_{i-1}} \left(\prod_{i=1}^n \left((1+a)^{(1-\delta_{i-1})\delta_i} (1+b)^{\delta_{i-1}\delta_i} \omega_i + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + (1+b)^{(1-\delta_{i-1})\delta_i} (1+a)^{\delta_{i-1}\delta_i} (1-\omega_i) \right) \right) \right)$$

Будем считать, что $\ln(1+r) \approx r, \ln(1+a) \approx a, \ln(1+b) \approx b$.

Итак, получим:

$$\ln(1+r_n) = (n - \sum_{i=1}^n \delta_{i-1})r + \sum_{i=1}^n \left((a(1-\delta_i)\delta_{i-1} + b\delta_i\delta_{i-1})\omega_i + \right.$$

$$\left. + (b(1-\delta_i)\delta_{i-1} + a\delta_i\delta_{i-1})(1-\omega_i) \right).$$

Итак, получим

$$\ln(1+r_n) \approx \imath$$

Находим математическое ожидание:

$$Er_n = E\left(\left(n - \sum_{i=1}^n \text{д}_{i-1} \right) r + W_n \right),$$

$$W_n = \sum_{i=1}^n ((a(1-\text{д}_i)\text{д}_{i-1} + b\text{д}_i\text{д}_{i-1})\text{щ}_i +$$

$$+ (b(1-\text{д}_i)\text{д}_{i-1} + a\text{д}_i\text{д}_{i-1})(1-\text{щ}_i))$$

Заметим, что:

$$E\delta_i = p, i = 1,\ldots,n$$
$$E(1-\delta_i)\delta_{i-1} = pq, i = 2,\ldots,n$$
$$E(1-\delta_1)\delta_0 = E(1-\delta_1) = q$$
$$E\delta_i\delta_{i-1} = p^2, i = 2,\ldots,n$$

Итак, имеем:

$$Er_n = \big(n - (1 + (n-1)p)\big)r + \big((aq + bp)\text{щ}_1 + $$
$$+ (bq + ap)(1 - \text{щ}_1)\big) + B,$$

$$B = \sum_{i=2}^n ((apq + bp^2)\text{щ}_i + (bpq + ap^2)(1 - \text{щ}_i)) \qquad (10)$$

Найдем дисперсию:

$$Dr_n = D\left((n - \sum_{i=1}^n \text{д}_{i-1})r + \sum_{i=1}^n ((a(1-\text{д}_i)\text{д}_{i-1} + \right.$$

$$\left. + b\text{д}_i\text{д}_{i-1})\text{щ}_i + (b(1-\text{д}_i)\text{д}_{i-1} + a\text{д}_i\text{д}_{i-1}) - \text{щ}_i)) \right)$$

$$Dr_n = D\left(\sum_{i=1}^n \text{д}_{i-1}(\text{д}_i m_i + t_i) \right).$$

Где:

$$m_i = (b-a)\omega_i + (a-b)(1-\omega_i)$$
$$t_i = a\omega_i + b(1-\omega_i) - r$$

Будем искать дисперсию путём построения матрицы ковариаций.

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\right) = D\big(\delta_0(\delta_1 m_1 + t_1) + \delta_1(\delta_2 m_2 + t_2) + \ldots + \delta_{n-1}(\delta_n m_n + t_n)\big)$$

$$c_1 = D\big(\delta_0(\delta_1 m_1 + t_1)\big) = D\big(\delta_1 m_1 + t_1\big) = D\big(\delta_1 m_1\big) = m_1^2 D\big(\delta_1\big) = m_1^2 pq$$

$$c_{12} = c_{21} = \mathrm{cov}(\delta_0(\delta_1 m_1 + t_1), \delta_1(\delta_2 m_2 + t_2)) = \mathrm{cov}(\delta_1 m_1 + t_1, \delta_1(\delta_2 m_2 + t_2)))$$

$$\xi := \delta_1 m_1 + t_1, \eta := \delta_1(\delta_2 m_2 + t_2)$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

$$E\xi = E(\delta_1 m_1 + t_1) = m_1 p + t_1$$

$$E\eta = E(\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2)) = p(t_2 + pm_2)$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\delta_1 m_1 + t_1 - (m_1 p + t_1))(\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2) - p(t_2 + pm_2)) =$$

$$= m_1 E(\delta_1 - p)(\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2) - p(t_2 + pm_2))$$

$$\mu = (\delta_1 - p)(\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2) - p(t_2 + pm_2))$$

Определяем вероятности всех элементарных исходов, получим

$$E\text{м} = p^2 q(t_2 + pm_2) + pq^2(qt_2 - p^2 m_2) + \\ + p^2 q^2(t_2 + (1+p)m_2)$$

В итоге, получим:

$$c_{12} = c_{21} = cov(\text{д}_0(\text{д}_1 m_1 + t_1), \text{д}_1(\text{д}_2 m_2 + t_2)) \\ = cov(\text{д}_1 m_1 + t_1, \text{д}_1(\text{д}_2 m_2 + t_2)) = \\ = m_1 E\text{м} = m_1(p^2 q(t_2 + pm_2) + pq^2(qt_2 - p^2 m_2) + \\ + p^2 q^2(t_2 + (1+p)m_2))$$

Найдем элементы главной диагонали матрицы ковариаций, стоящие ниже первой строки:

$$c_i = D\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\big) = E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i) - E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\big)\big)^2$$

Найдем сначала $E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\big), \eta := \delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)$

$$E\eta = p(t_i + pm_i).$$

Найдем теперь $E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i) - E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\big)\big)^2$.

$$E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i) - E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\big)\big)^2 = E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i) - p(t_i + pm_i)\big)^2,$$

$$\eta := \delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i) - p(t_i + pm_i)$$

$$E\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i) - p(t_i + pm_i)\big)^2 = (q^2 + pq)p^2(t_i + pm_i)^2 + \\ + pq(qt_i - p^2 m_i)^2 + p^2 q^2(t_i + (1+p)m_i)^2 = \\ = p^2 q(t_i + pm_i)^2 + pq(qt_i - p^2 m_i)^2 + p^2 q^2(t_i + (1+p)m_i)^2$$

Итак, получили:

$$c_i = D\big(\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\big) = p^2 q(t_i + pm_i)^2 + pq(qt_i - p^2 m_i)^2 + \\ + p^2 q^2(t_i + (1+p)m_i)^2$$

Найдем

$$c_{23} = c_{32} = \mathrm{cov}(\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2), \delta_2(\delta_3 m_3 + t_3)).$$

Введем обозначения:

$$\xi = \delta_1(\delta_2 m_2 + t_2)$$

$$\eta = \delta_2(\delta_3 m_3 + t_3)$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

$$E\xi = p(t_2 + pm_2)$$

$$E\eta = p(t_3 + pm_3)$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2) - p(t_2 + pm_2))(\delta_2(\delta_3 m_3 + t_3) - p(t_3 + pm_3)),$$

$$\mu := (\delta_1(\delta_2 m_2 + t_2) - p(t_2 + pm_2))(\delta_2(\delta_3 m_3 + t_3) - p(t_3 + pm_3))$$

$$E\text{м} = p^3 q^2 m_2(t_3 + (1+p)m_3) + \\ + p^2 q^2((t_2 + pm_2)(t_3 + pm_3) - (qt_3 - \\ p^2 m_3)m_2) - p^2 q(t_3 + +pm_3)(qt_2 - p^2 m_2)$$

Аналогично находятся все

$$c_{ij}, 1 < i < j \le n.$$

Таким образом, получим:

$$c_{ij} = p^3 q^2 m_i\big(t_j + (1+p)m_j\big) + \\ + p^2 q^2\Big(\big(t_i + pm_i\big)\big(t_j + pm_j\big) - \\ - \big(qt_j - p^2 m_j\big)m_i\Big) - T_{ij}$$

$$T_{ij} = p^2 q(t_j + pm_j)(qt_i - p^2 m_i).$$

Получим следующую ковариационную матрицу:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_2 & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & c_i & c_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{ji} & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n,n-1} & c_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, получим следующее выражение для дисперсии:

$$Dr_n = D\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{i-1}(\delta_i m_i + t_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i + 2\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} c_{ij} = \\ = c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i + 2c_{12} + 2\sum_{2 \le i < j \le n}^{n} c_{ij} \quad (11)$$

где:

$$c_{ij} = p^3 q^2 m_i(t_j + (1+p)m_j) + p^2 q^2((t_i + pm_i)(t_j + pm_j) - \\ - (qt_j - p^2 m_j)m_i) - p^2 q(t_j + pm_j)(qt_i - p^2 m_i)$$

$$c_{12} = m_1 E\mu = m_1(p^2 q(t_2 + pm_2) + pq^2(qt_2 - p^2 m_2) + p^2 q^2(t_2 + (1+p)m_2))$$

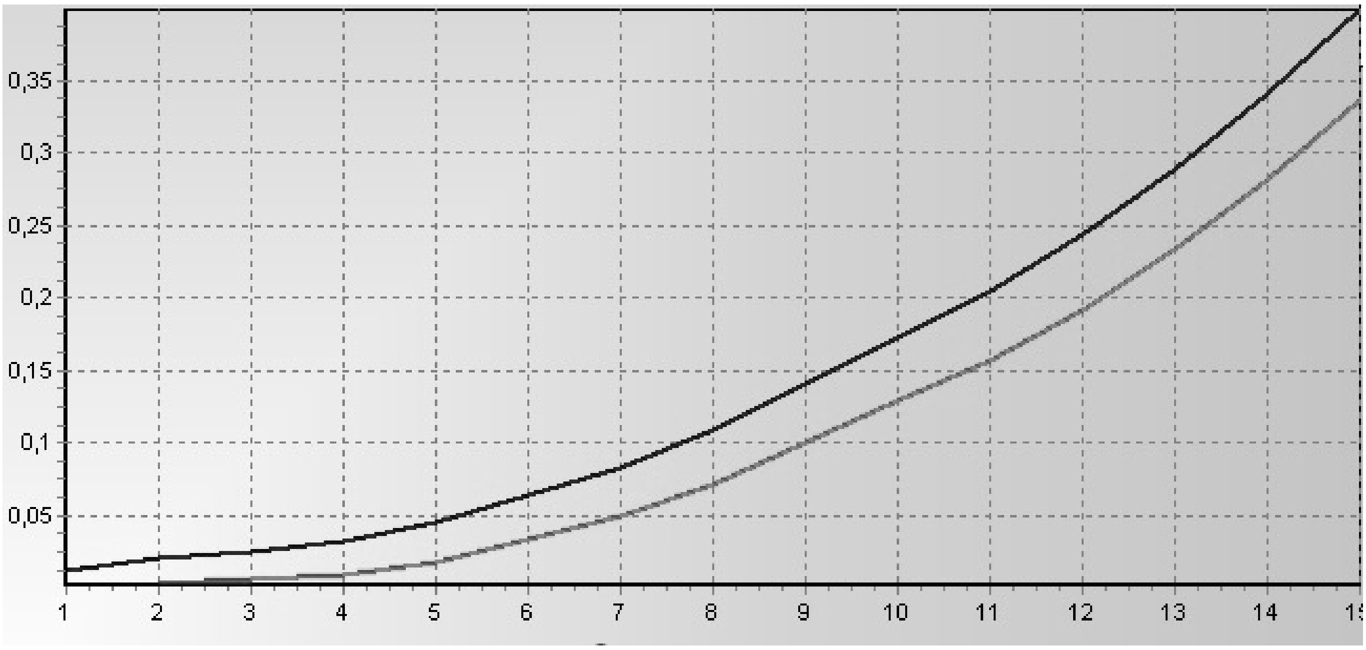

Рис. 1. Коридор ожидаемой доходности

$$c_i = p^2 q(t_i + pm_i)^2 + pq(qt_i - p^2 m_i)^2 + p^2 q^2 (t_i + (1+p)m_i)^2$$

$$c_1 = m_1^2 pq$$

$$m_i = (b-a)\omega_i + (a-b)(1-\omega_i)$$
$$t_i = a\omega_i + b(1-\omega_i) - r \qquad .$$

Результаты

Получим следующее выражения для коридора ожидаемой доходности:

$I_k = \boldsymbol{Er_n} \pm k\sqrt{Dr_n}$, где Dr_n определяется по формуле (11),

$\boldsymbol{Er_n}$ — по формуле (10)

Рассмотрим случайное событие

А$n = \{Er_n - k\sqrt{Dr_n} \le r_n \le Er_n + k\sqrt{Dr_n}\}$.

Исходя из закона больших чисел была получена оценка P{Аn}≥1–б, где α — уровень значимости, который задаётся; α — (обычно малое) число. Коэффициент k зависит от уровня значимости α: k= k(α).

Коэффициент k находится из соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k(\alpha)}^{k(\alpha)} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 1 - \alpha \,.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \;—$$

нормальная плотность вероятности, и здесь мы сталкиваемся с нормальным распределением вероятности на числовой прямой

$$\widetilde{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Чем меньше значение α, тем больше значение k(α).

Обычно k(α) задается с помощью таблиц в зависимости от уровня значимости α. Параметр k(α) находится программным путём, используя численные методы интегрирования и решения уравнения, а именно метод Симпсона и метод Ньютона соответственно.

Пример коридора ожидаемой доходности при известной скупке представлен на рис. 1 при уровне значимости α=0,05, процентная ставка составляет 0,005, число периодов — 15, q=0,9, падение акции составляет –0,001, рост — 0,008. Скупка происходит в следующем порядке — последовательность: $щ = (щ_i)_{i=1}^n$ имеет вид:: $щ = (1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0)$.Значение k(α) определено и составляет 1,96.

Заключение

Таким образом, получили полосу возможной доходности I_k. Следовательно, справедливо утверждение, что при достаточно больших n с вероятностью близкой к единице доходность в момент времени n будет лежать в отрезке:

$$\left[Er_n - k(б)\sqrt{Dr_n}, Er_n + k(б)\sqrt{Dr_n}\right].$$

Обсуждение

Важным для исследования является наличие особенностей у введенных моделей. Для исходного класса моделей, получаем, что мартингальная мера представляет собой случайную величину, поскольку есть зависимость цены акции от двух независимых случайных последовательностей — индикаторов поведения акции на рынке. Тем более, что введен параметризованный класс моделей. В ходе исследований было установлено и работы с разработанным программным комплексом на языке C++, что при

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}$$

рынок является детерминированным.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Ширяев, Основы стохастической финансовой математики, т. 1, Факты. Модели, МЦНМО, М., 2016, 440 с.
2. А.Н. Ширяев, А. С. Черный. Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража// Российская академия наук. Труды математического института им.А.В.Стеклова.2002. т. 237.С.14–19.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации