ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕНЫ

DEFINITION OF THE COEFFICIENTS IN THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL MODEL OF PRICE FORMATION

A. Burmistrov
A. Novikov

Summary. Stochastic differential model (SDM) of price formation proposed by the authors earlier describes the price changes more adequately than the classical price model, since it takes into account the random nature of the drift coefficient and the volatility of the asset prices. It is the equations for the drift and volatility together with equation for the price of the financial instrument itself form the system of stochastic differential equations (SDE). In this article, within the framework of the SDM, the coefficients of the SDE system are determined, with the help of which the asset prices are modeled.

Keywords: asset prices, stochastic differential equation, continuous distribution, stochastic volatility, drift.

Бурмистров Александр Васильевич
К.ф.-м.н., н.с., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск; Старший преподаватель, Новосибирский госуниверситет
burm@osmf.sscc.ru
Новиков Алексей Владимирович
К.ф.-м.н., директор по развитию, ООО Цифровые экосистемы, Новосибирск
allex.novikov@digital-ecosystems.ru

Аннотация. Ранее предложенная авторами стохастическая дифференциальная модель (СДМ) формирования цены значительно более адекватно описывает изменение ценового ряда в сравнении с классической моделью цены, поскольку она учитывает случайную природу изменения коэффициентов роста и волатильности ценового ряда. Именно уравнения на два последних коэффициента и входят в систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) кроме цены самого финансового инструмента. В данной статье в рамках СДМ определяются коэффициенты системы СДУ, с помощью которой происходит моделирование ценового ряда.

Ключевые слова: ценовой ряд, стохастическое дифференциальное уравнение, непрерывное распределение, случайная волатильность, коэффициент роста.

Введение

Задача построения адекватной с практической точки зрения математической модели ценового ряда является одной из классических задач экономики в целом и финансовой математики в частности. В работе [4, С. 5–6] проанализирована динамики вероятностных характеристик ценовых рядов нескольких российских акций торгуемых на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) в 2002–2003 годах. На основе проведенного анализа была предложена стохастическая дифференциальная модель (СДМ) ценового ряда [4, С. 22], которая учитывало случайную природу изменения коэффициентов роста и волатильности, что значительно адекватнее отражало реальность, чем классическая модель цены [4, С. 4], в которой данные коэффициенты предполагались постоянными. В СДМ коэффициенты роста $\hat{\mu}$ и волатильности $\hat{\sigma}$ являются стационарными случайными процессами на R и R^+ соответственно. Для аппроксимации их распределений, с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона [10, С. 8], когда по выборке оцениваются первые два момента распределения, определяются наиболее адекватные распределения в множестве анализируемых непрерывных распределений на R и R^+ соответственно. В результате анализа динамики коэффициентов $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ в [4, С. 7–10; 9, С. 656] было предложено аппроксимировать их распределения одним из набора симметричных непрерывных распределений с возможными значениями на всей числовой оси R (для $\hat{\mu}$) и одним из набора распределений с возможными значениями на положительной полуоси R^+ (для $\hat{\sigma}$). Целесообразность выбора именно из рассматриваемого набора распределений вытекала из практических наблюдений выборок для ценовых рядов, соответствующих различным акциям в 2002–2003 годах. Этот набор был дополнен новыми непрерывными распределениями [9, С. 656–657] в силу значительного расширения рынка ценных бумаг и накопления огромного массива исторических цен за последние 15 лет.

В настоящей работе представлены формулы для коэффициентов системы СДУ, которая возникает в рамках СДМ [4, С. 22; 9, С. 657]. Предложенные формулы будут использованы для прогноза ценовых рядов в автоматизированной финансовой экосистеме мобильных приложений [7, С. 137; 8, С. 158], наряду со стохастической кинетической моделью формирования цены [2, С. 110] и технологиями глубокого обучения [5, С. 23; 6, С. 807]. Актуальность данной тематики связана с ростом объемов торговли на финансовых рынках и спросом на адекватные и универсальные торговые алгоритмы.

Система СДУ для прогноза ценовых рядов

Классической моделью динамики цены рискового актива является геометрическое броуновское движение, которое удовлетворяет СДУ в смысле Ито (см., например, [4, С. 4]). При этом, поскольку в прикладных задачах финансовой математики время дискретно из-за специфики данной предметной области (котировки акций, индексов определяются с некоторым дискретным шагом — тиком), то целесообразно перейти от непрерывной модели к дискретной: (1), где η_n — независимые стандартные нормальные случайные величины, h — шаг равномерной сетки по времени, P_n — моделируемая цена акции в узле номер n. Влияние параметров модели на плотность распределения P_n подробно изучена, а также хорошо известны недостатки данной модели, основным из которых является неограниченный рост дисперсии P_n с ростом n. При формировании СДМ, учитывающей стохастичность параметров μ и σ для нивелирования недостатков классической модели, использовался метод «скользящего окна» [4, С. 5; 9, С. 655].

При имеющемся историческом ряде цен $\{P_i; i = 1, \ldots, T\}$ прогноз $P_{T+1}, \ldots, P_{T+t}$ в рамках СДМ строится на основе системы СДУ в соответствии с выбранными распределениями (см., например, [4, С. 23]): (2).

Здесь $n \geq T$, h — шаг сетки (тик), $\eta_{n,i}$ — независимые стандартные нормальные величины ($i = 1, 2, 3$), M_μ и M_σ — математические ожидания величин $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, соответственно, оцененные по исторической выборке с помощью скользящего окна [4, С. 5; 9, С. 655]. Далее мы приведем формулы, определяющие функции Φ_1 и Φ_2, а также величины A_1 и A_2. Заметим, что часть формул исправляют некоторые опечатки и неточности, допущенные ранее в работе [4, С. 12–22], а также имеют более удобный для моделирования вид; другая часть формул получена впервые для распределений предложенных в [3, С. 71; 9, С. 656–657]. Оценки для величин A_1 и A_2 представлены впервые.

Коэффициент роста

Функция $\Phi_1(x)$ для каждого конкретного распределения находится по формуле [1, С. 5–6] (3), где $f_\mu(x)$ — непрерывная плотность распределения, выбранная с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона [10, С. 8], M_μ — соответствующее математическое ожидание.

Для *распределения Чампернауна* (обозначим $y=\beta(x-\alpha)$) имеем (4). Здесь $C=Ich(\infty)/2=0.915965594\ldots$ — постоянная Каталана.

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + \mu h P_n + \sigma\sqrt{h} P_n \eta_n, n > 0 \\ P(0) = P_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n + h\mu_n P_n + \sqrt{h}\sigma_n P_n \eta_{n,1}, \\ \mu_{n+1} &= \mu_n - A_1 h(\mu_n - M_\mu) + \sqrt{A_1 h}\Phi_1(\mu_n)\eta_{n,2}, \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n - A_2 h(\sigma_n - M_\sigma) + \sqrt{A_2 h}\Phi_2(\sigma_n)\eta_{n,3} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Phi_1(x) = \sqrt{-\frac{2}{f_\mu(x)} \int_{-\infty}^{x} (y - M_\mu) f_\mu(y) dy}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &M_\mu = \alpha, f_\mu(x) = \frac{\beta}{\pi \cosh(y)}, \\ &\Phi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\cosh(y)\,[2C - Ich(|y|)]}; Ich(t) = \int_0^t \frac{s ds}{\cosh s} \end{aligned} \tag{4}$$

Для *нормального распределения* имеем (5).

Для *логистического распределения* $\left(y = \frac{x-\alpha}{2\beta}\right)$ имеем (6).

Для *распределения Лапласа* имеем (7)

Для *обобщённого нормального распределения* $\left(y = \left(\frac{|x-m|}{\alpha}\right)^{\beta}\right)$ имеем (8).

Здесь $\Gamma(a,z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt$ — неполная гамма-функция.

Для *распределения Стьюдента* ($n > 3$, $n \in \mathbb{N}$) имеем (9).

Коэффициент волатильности

Функция $\Phi_2(x)$ для каждого конкретного распределения находится по формуле [1, С. 5–6] (10), где $f_\sigma(x)$ — непрерывная плотность распределения, подобранная с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона [10, С. 8], M_σ — соответствующее математическое ожидание.

Для *гамма распределения* имеем (11).

$$M_\mu = \alpha, f_\mu(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2}\right),$$
$$\Phi_1(x) = \sqrt{2}\beta. \tag{5}$$

$$M_\mu = \alpha, f_\mu(x) = \frac{1}{4\beta\cosh^2(y)},$$
$$\Phi_1(x) = 2\sqrt{2}\beta\cosh(y)\sqrt{\ln 2 + \ln(\cosh(y)) - y\tanh y}. \tag{6}$$

$$M_\mu = \alpha, f_\mu(x) = \frac{\beta}{2}\exp(-\beta|x-\alpha|),$$
$$\Phi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\beta|x-\alpha|+1}. \tag{7}$$

$$\Phi_1(x) = \alpha\sqrt{\frac{2}{\beta}\exp\left\{-\frac{1}{2}y\right\}}\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right) - sgn(x-m)\Gamma\left(\frac{2}{\beta}, y\right)}. \tag{8}$$

$$\Phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\sqrt{n\sigma^2 + (x-m)^2}. \tag{9}$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{-\frac{2}{f_\sigma(x)}\int_0^x (y - M_\sigma) f(y) dy}, \tag{10}$$

Для *логнормального распределения* имеем (12).

Здесь $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ — функция ошибок.

Для *распределения Рэлея* имеем (13).

Здесь $erfc(t) = 1 - erf(t)$ — дополнительная (остаточная) функция ошибок.

Для *распределения Вальда* имеем (14).

Для *распределения Накагами* $\left(y = \frac{\mu x^2}{\omega}\right)$ имеем (15).

$$M_\sigma = \frac{\beta}{\alpha}, f_\sigma(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \exp(-\alpha x), \Phi_2(x) = \sqrt{\frac{2x}{\alpha}}. \tag{11}$$

$$M_\sigma = \alpha e^{\frac{\beta^2}{2}}, f_\sigma(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{x}{\alpha}\right)^2}{2\beta^2}\right),$$

$$\Phi_2(x) = \exp\left(\frac{\left[\ln\frac{x}{\alpha}\right]^2 + \beta^4}{4\beta^2}\right) \sqrt{\alpha x\beta\sqrt{2\pi}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{\ln\frac{x}{\alpha}}{\sqrt{2}\beta}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{\ln\frac{x}{\alpha} - \beta^2}{\sqrt{2}\beta}\right)\right)}. \tag{12}$$

$$M_\sigma = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}, f_\sigma(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right),$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{x}\left\{\alpha e^{\frac{x^2}{2\alpha^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right) + x - \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}},$$

$$\mathrm{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2}\, ds. \tag{13}$$

$$M_\sigma = \alpha, f_\sigma(x) = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\beta(x-\alpha)^2}{2\alpha x}\right),$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{\sqrt{\frac{8\alpha\pi x^3}{\beta}} \exp\left(\frac{\beta(x+\alpha)^2}{2\alpha x}\right) \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\beta(x+\alpha)^2}{2\alpha x}}\right)}. \tag{14}$$

Здесь $\Gamma(a, z)$ — неполная гамма-функция.

Для *распределения Вейбулла* имеем (16).

Для *распределения Максвелла* имеем (17).

Величины A_1 и A_2

Далее для оценки величин A_1 и A_2 посчитаем следующие выборочные корреляции соседних величин [1, С. 8]: (18).

Здесь N — параметр скользящего окна, V_μ и V_σ — дисперсии величин $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, соответственно, оцененные по исторической выборке с помощью скользящего окна [4, С. 5; 9, С. 655].

Отсюда имеем следующие выражения: (19).

Предложенные в данной статье формулы были успешно протестированы на большом количестве исторических ценовых рядов. Результаты тестов будут представлены в наших следующих работах.

Заключение

СДМ — одна из основных частей математического блока (наряду со стохастической кинетической моделью [2, С. 108], искусственными нейронными сетями и большими массивами данных [5, С. 24; 6, С. 800]) интеллектуальной финансовой экосистемы, которая в автоматизированном режиме позволяет планировать, оценивать

$$\Phi_2(x) = \exp\left\{\frac{y}{2}\right\}\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}} x^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)}\Gamma(\mu, y) - \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}, y\right)}. \quad (15)$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{k}\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{k-1}\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(e^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}-1\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{k}, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)e^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\right\}}. \quad (16)$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{\frac{4a^4}{x^2}\exp\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right) + \frac{2a^2}{x^2}(x^2+2a^2) - \frac{8a^3}{\pi x}}. \quad (17)$$

$$R_k^\mu(1) \equiv \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\hat{\mu}_{\frac{jN}{2}} - M_\mu\right)\left(\hat{\mu}_{\frac{(j+1)N}{2}} - M_\mu\right) = V_\mu \exp\left\{-A_1\frac{Nh}{2}\right\},$$

$$R_k^\sigma(1) \equiv \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\hat{\sigma}_{\frac{jN}{2}} - M_\sigma\right)\left(\hat{\sigma}_{\frac{(j+1)N}{2}} - M_\sigma\right) = V_\sigma \exp\left\{-A_2\frac{Nh}{2}\right\}. \quad (18)$$

$$A_1 = -\frac{2}{Nh}\ln\frac{R_k^\mu(1)}{V_\mu}, A_2 = -\frac{2}{Nh}\ln\frac{R_k^\sigma(1)}{V_\sigma}. \quad (19)$$

и контролировать результаты инвестиций индивидуальных пользователей мобильного приложения [7, С. 137; 8, С. 158]. Внедрение предлагаемой экосистемы позволит привлечь на фондовый рынок розничных непрофессиональных инвесторов, что может обеспечить приток инвестиций и ликвидности в реальный сектор экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверина Т. А. Моделирование стационарных случайных процессов с заданным одномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией / Аверина Т. А., Артемьев С. С. // Препринт 495. ВЦ СО АН СССР. — Новосибирск, 1984. — 24с.
2. Бурмистров А. В. Стохастическая кинетическая модель формирования цены / Бурмистров А. В., Новиков А. В. // Международный научно-исследовательский журнал. — 2017. — № 7–3(61). — С. 107–112.
3. Бурмистров А. В. Усовершенствование стохастической дифференциальной модели ценового ряда / Бурмистров А. В., Новиков А. В. // Марчуковские научные чтения — 2017. Тезисы. ИВМиМГ СО РАН, 25 июня — 14 июля 2017 г. — Новосибирск: Омега Принт, 2017. — С. 71.
4. Новиков А. В. Адаптированные стохастические дифференциальные модели ценового ряда / А. В. Новиков // Препринт ИВМиМГ СО РАН, 1157. — Новосибирск, 2003. — 26с.
5. Новиков А. В. Виртуальный финансовый консультант, использующий системы искусственного интеллекта и финансовые данные в реальном времени / А. В. Новиков, А. В. Бурмистров // Тенденции развития науки и образования. — 2017. — № 26–4. — С. 21–27.
6. Новиков А. В. Интеллектуальная система для персонального финансового консультирования пользователей на основе актуальных финансовых данных / А. В. Новиков, А. В. Бурмистров // Аллея науки. — 2017. — Т. 1. № 9. — С. 796–809.
7. Новиков А. В. Использование портфельного подхода в интеллектуальной экосистеме мобильных приложений / Новиков А. В., Бурмистров А. В. // Экономика и бизнес: теория и практика. — 2017. — № 12. — С. 131–139.
8. Новиков А. В. Персональное мобильное приложение для торговли на биржевых площадках / Новиков А. В., Бурмистров А. В. // Экономика и бизнес: теория и практика. — 2017. — № 11. — С. 151–160.
9. Новиков А. В. Усовершенствование стохастической дифференциальной модели ценового ряда / Новиков А. В., Бурмистров А. В. // Труды Международной конференции по вычислительной и прикладной математике «ВПМ'17» в рамках «Марчуковских научных чтений», Новосибирск, 25 июня — 14 июля 2017 г. [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://conf.nsc.ru/cam17/ru/proceedings, свободный. — (Дата обращения: 19.01.2018) — С. 654–658.
10. Greenwood P.E. A guide to chi-squared testing / Greenwood P. E., Nikulin M. S. — New York: John Wiley & Sons, 1996. — 280 p.

© Бурмистров Александр Васильевич (burm@osmf.sscc.ru), Новиков Алексей Владимирович (allex.novikov@digital-ecosystems.ru).
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН