

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОСТОРОННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ — БУТЫЛКА КЛЕЙНА

**Иващенко Андрей Викторович**

*К.т.н., доцент, Московский государственный  
строительный университет*

**Степура Анна Вячеславовна**

*Преподаватель, Московский государственный  
строительный университет  
stepura83@mail.ru*

### MODELING OF THE ONE-SIDED SURFACE OF THE KLEIN BOTTLE

**A. Ivashchenko  
A. Stepura**

*Summary.* The article discusses two ways of modeling a topological surface — the Klein Bottle in the 3DMax graphics editor. Two variants of the visual image of the surface are presented.

Currently, there is a turn in architecture and design towards extraordinary surfaces, the modeling of which presents certain difficulties.

The expanding application of information modeling technologies allows for the approximation of complex surfaces with a high degree of accuracy and reliability. Designing and calculating which manually were extremely time-consuming. The observed tendency of the forms of architectural objects to approach biomorphic surfaces, as well as fractal geometry, mark a departure from the prismatic forms of buildings that filled the urban space in the twentieth century. Some paradox inherent in such forms as a Klein Bottle, a Mobius Sheet, the Boy's surface, etc. is at the forefront of modern conceptual solutions in architecture.

*Keywords:* Klein bottle, one-sided surface, topological surface, information modeling technologies (TIM), 3DMax graphic editor.

*Аннотация.* В статье рассмотрены два способа моделирования топологической поверхности — Бутылка Клейна в графическом редакторе 3dMAX. Представлены два варианта наглядного изображения поверхности.

В настоящее время в архитектуре и дизайне наблюдается поворот к неординарным поверхностям, моделирование которых представляет определенные сложности.

Расширяющееся применение технологий информационного моделирования позволяет осуществлять с высокой степенью точности и достоверности аппроксимацию сложных поверхностей. Проектирование и расчет которых вручную, были крайне трудоемки. Наблюдающаяся тенденция приближения форм архитектурных объектов к биоморфным поверхностям, а также фрактальная геометрия знаменуют отход от призматических форм зданий, заполнивших урбанистическое пространство в XX веке. Некоторая парадоксальность присущая таким формам, как Бутылка Клейна, Лист Мебиуса, Поверхность Боя и пр. находится на острие современных концептуальных решений в архитектуре.

*Ключевые слова:* бутылка Клейна, односторонняя поверхность, топологическая поверхность, технологии информационного моделирования (ТИМ), графический редактор 3dMAX.

**И**звестная односторонняя поверхность — Бутылка Клейна названа в честь немецкого ученого-математика Феликса Клейна, который впервые ее описал [1, с. 81].

Интерес к этой поверхности в архитектуре появился только в начале XX в (рис. 1) [2]. Развитие технологий информационного моделирования (ТИМ) зданий и сооружений послужило толчком к применению подобных нетривиальных поверхностей в строительстве. Для внедрения в практику следует разработать алгоритмы моделирования топологических поверхностей в графических редакторах.

Также цифровое моделирование поверхностей необходимо для создания объектов с помощью 3-D печати и при использовании аддитивных технологий в строительстве.

Бутылка Клейна — это односторонняя топологическая поверхность, представляющая собой два склеенных по границе листа Мебиуса, которая может быть задана системой параметрических уравнений [3], [4]:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \left( a + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v \right) \cos u; \\y(u, v) &= \left( a + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v \right) \sin u;\end{aligned}$$



Рис. 1. Торговый центр MyZeil, Франкфурт, Германия.

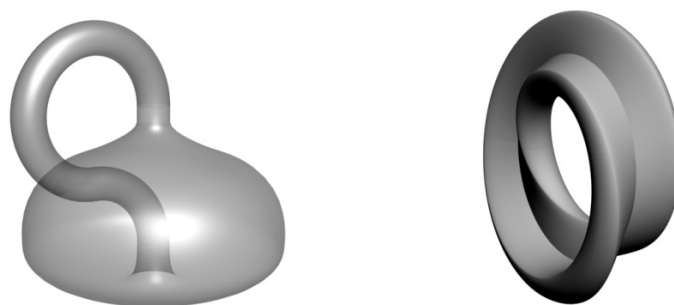


Рис. 2. Модели Бутылки Клейна

$$z(u, v) = \sin \frac{u}{2} \sin v + \cos \frac{u}{2} \sin 2v;$$

где  $a > 2, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

Известны два варианта наглядного изображения бутылки Клейна: широко известный (рис. 2, слева) и малоизвестный (рис. 2, справа).

Рассмотрим моделирование поверхности бутылки Клейна в системе 3dMAX.

Вначале рассмотрим широко известный вариант.

Результурующая модель состоит из двух частей:

1. тело вращения (основная часть бутылки Клейна) с отверстиями в верхней (горлышко) и в нижней (донышко) частях бутылки;
2. изогнутая трубка, соединяющая верхнее и нижнее отверстия, обеспечивающая односторонность всей поверхности.

Каждая из частей формируется независимо.

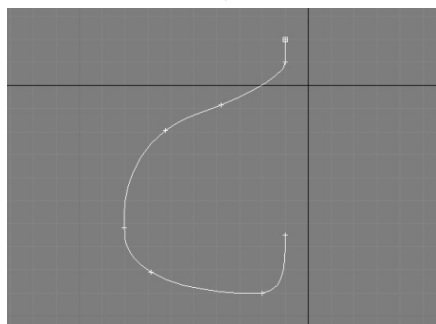


Рис. 3. Плоский сплайн

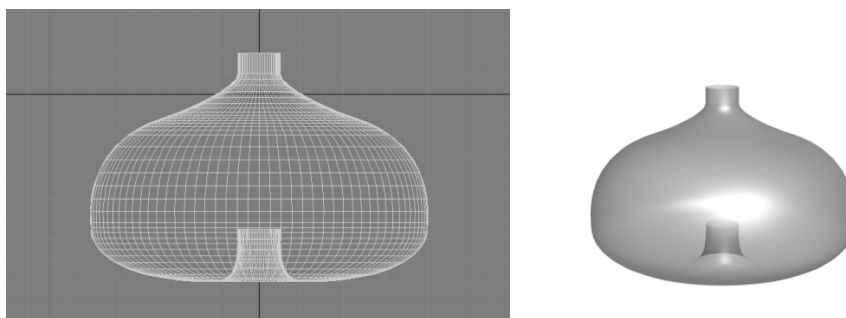


Рис. 4. Трехмерный объект

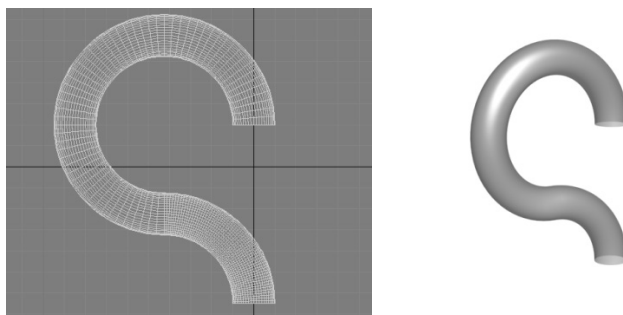


Рис. 5. Моделирование «ручки»

Последовательность создания первой части.

- ◆ создается плоский сплайн, представляющий собой образующую основной части бутылки (рис. 3);
- ◆ к сплайну применяется модификатор вращения — **Leather**, и соответствующим образом изменяется местоположение оси вращения. В результате создается трехмерный объект (рис. 4).

Вторая часть представляет собой объединение двух неполных торов (имеются в виду трехмерные примитивы 3dMAX, а не геометрические объекты) с одинаковым радиусом образующей. Первый неполный тор «прояв-

лен» на угол 270, второй — на угол 90 (в результате использования параметра **Slice**). Радиусы направляющих подобраны таким образом, что в объединенном объекте разница по высоте между краями в точности равна расстоянию между отверстиями в «горлышке» и «дне» основной части бутылки. Другой вариант создания этой трубки — использование вместо торов двух примитивов **Tube** разной высоты с последующим применением модификатора **Bend**. Сформированные примитивы образуют «ручку» объекта (рис. 5).

В итоге остается правильно соединить две части бутылки Клейна (рис. 8 слева).

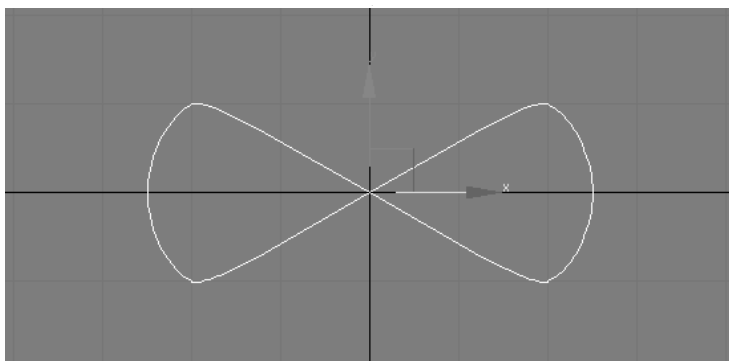


Рис. 6. Плоский сплайн «восьмерка»



Рис. 7. Стержень



Рис. 8. Скрученный стержень



Рис. 9. Сомкнутый стержень

Малоизвестный вариант поверхности можно получить кинематически, если в качестве образующей взять кривую с одной точкой самопересечения (например, лемнискату Бернулли), а в качестве направляющей — окружность, и при этом в процессе движения вдоль направляющей образующая совершает поворот на 180 градусов.

Алгоритм создания этой модели следующий:

- ◆ в видовом экране **Top** создается плоский сплайн-«восьмерка» (рис. 6), при этом необходимо соблюсти осевую симметрию этого сплайна, иначе в результирующей модели получатся нежелательные «ступеньки».
- ◆ к сплайну применяется модификатор выдавливания — **Extrude** с достаточным большим параметром выдавливания, в результате получаем стержень (рис. 7);
- ◆ к полученному стержню применяется модификатор **Twist**, с указанием угла скручивания 180, вдоль оси z. В результате получим скрученный стержень (рис. 8);
- ◆ Применяем модификатор **Bend** с углом изгиба 360, в результате скрученный стержень изогнется и сомкнется в «кольцо» (рис. 9).

Полученному объекту необходимо назначить двусторонний материал, иначе половина поверхности будет невидимой.

В заключение можно отметить, что программа 3dMAX предоставляет широкие возможности пользователям по проектированию объектов любой природы, в том числе и геометрических поверхностей, описываемых аналитическими уравнениями [5].

---

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левитин Карл “Геометрическая рапсодия”, изд. Амфора, 2016, 313 с.
2. Лебедев Н.А., Фаткулина А.А. Невозможное в архитектуре. В сборнике: Дни студенческой науки. М: изд. НИУ МГСУ 2019. С. 790–792.
3. Чешкова М.А. Об одной модели Бутылки Клейна. Барнаул Журнал «Известия алтайского государственного университета». 2016. № 1 (89) с. 180–184.
4. Чешкова М.А. Односторонние поверхности. Барнаул. Журнал «Известия алтайского государственного университета». 2015. № 1–2 (85) с. 164–168.
5. Еремеева А.П., Наумянов Д.Э., Крылова О.В., Царева М.В. Архитектура сквозь призму геометрии. В сборнике: Дни студенческой науки. М: изд. НИУ МГСУ 2019. с. 772–774.

---

© Иващенко Андрей Викторович, Степура Анна Вячеславовна ( stepura83@mail.ru ).  
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»