

АСПЕКТЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ КВАНТОВО-ИНСПИРИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Масленников Владимир Владимирович

Российский технологический университет МИРЭА
vldmsn@yahoo.com

ASPECTS OF THE PRACTICAL APPLICATION OF QUANTUM-INSPIRED ALGORITHMS FOR SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

V. Maslennikov

Summary. The article discusses the features of the practical application of quantum-inspired algorithms in problems of linear algebra. It is determined that these algorithms have an exponential asymptotic acceleration in comparison with the known classical methods for solving problems associated with low-rank matrices. A theoretical analysis of algorithms based on mathematical modeling is carried out, aimed at identifying specific features in their practical implementation in order to determine the characteristics and properties in which quantum-inspired algorithms can outperform existing classical approaches. The study shows that practically quantum-inspired algorithms can achieve a positive effect if a number of conditions are strictly observed: low rank of the input matrix, low condition number, and significantly high dimension of the input matrix.

Keywords: quantum-inspired algorithms, linear algebra, approximation, singular value decomposition, Monte Carlo method, complexity estimation of algorithms.

Аннотация. В статье рассматриваются особенности практического применения квантово-инспирированных алгоритмов в задачах линейной алгебры. Определяется, что данные алгоритмы имеют экспоненциальное асимптотическое ускорение по сравнению с известными классическими методами решения задач, связанных с матрицами низкого ранга. Проводится теоретический анализ алгоритмов на базе математического моделирования, направленный на выявление специфических особенностей в их практической реализации с целью определения характеристик и свойств, при которых квантово-инспирированные алгоритмы могут превзойти существующие классические подходы. Исследование показывает, что практически квантово-инспирированные алгоритмы могут достигать положительного эффекта при строгом соблюдении ряда условий: низкий ранг входной матрицы, низкое число обусловленности и значительно высокая размерность входной матрицы.

Ключевые слова: квантово-инспирированные алгоритмы, линейная алгебра, аппроксимация, сингулярное разложение, метод Монте-Карло, оценка сложности алгоритмов.

Введение

В современном мире проведение исследований в области квантовых вычислений сопровождается убежденностью научных сообществ в том, что квантовые алгоритмы способны решать узконаправленные и специфические задачи [1] значительно эффективнее, чем подходы и методы классических информационных технологий. Однако граница между парадигмами классических и квантовых вычислений постоянно меняется ввиду периодического появления не только новых квантовых алгоритмов, основывающихся на накопленных знаниях о данной предметной области, но и инновационных классических алгоритмов, которые, по крайней мере, частично базируются на разработках в среде квантовых вычислений [2, 3].

Наиболее актуальной сферой применения квантовых алгоритмов для линейной алгебры является машинное обучение [4]. Эти алгоритмы обычно полилогарифмически масштабируются до заданной размерности, что подразумевает асимптотическое экспоненциальное

ускорение по сравнению с современными классическими методами. В связи с этим возникает значительный интерес к подходу деквантования, который является основополагающим фактором в квантово-инспирированных классических алгоритмах для задач линейной алгебры с сублинейной сложностью [3, 5, 6]. При этом стоит отметить, что алгоритмы деквантования выполняются главным образом для матриц с низким рангом, тогда как физические квантовые вычислительные системы демонстрируют экспоненциальное ускорение в сравнении с классическими алгоритмами для разреженных матричных задач полного ранга, включая квантовое преобразование Фурье, анализ собственных векторов и значений, линейные системы и другие. Таким образом, применение алгоритмов деквантования, например, для таких задач, как инверсия матриц высокого ранга, подразумевает моделирование квантовых вычислительных систем классическими компьютерами с высокой степенью эффективности.

Методики, используемые для определения сложности квантово-инспирированных алгоритмов, при-

водят к ограничениям, предполагающим достаточно большие временные затраты на выполнение данных алгоритмов для практических приложений. Например, доказанная сложность для линейных систем составляет $\tilde{O}(k^{16}k^6 \|A\|_F^6 / \varepsilon^6)$ [5], а для рекомендательных систем — $\tilde{O}(k^{12} / \varepsilon^{12})$ [3], где A — входная матрица, $\|A\|_F$ — норма Фробениуса матрицы A , k — число обусловленности, k — ранг матрицы, ε — точность алгоритма. Данное наблюдение приводит к следующим вопросам:

1. Являются ли ограничения сложности следствием методик доказательства или они отражают фундаментальное ограничение возможностей квантово-инспирированных алгоритмов?
2. Каким образом квантово-инспирированные алгоритмы функционируют в практическом применении?

Следующие разделы статьи посвящены исследованию квантово-инспирированных алгоритмов для задач линейной алгебры. Проводится теоретический анализ алгоритмов, направленный на выявление потенциальных узких мест в их практической реализации, для идентификации свойств, в которых квантово-инспирированные алгоритмы могут превзойти существующие классические методы.

Обзор квантово-инспирированных алгоритмов для систем линейных уравнений

Предлагаемое автором описание квантово-инспирированных алгоритмов для систем линейных уравнений представляется в виде отдельных экземпляров более общего метода выборки из векторов, выраженных в терминах разложения по сингулярным значениям (Singular Value Decomposition, далее — SVD) входной матрицы. Далее для обозначения матриц вводятся заглавные буквы, а для обозначения векторов-столбцов — строчные буквы с вертикальной чертой сверху. Например, система линейных уравнений записывается как $A\bar{x} = \bar{b}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$.

Рассматриваются задачи следующего вида. Имеется матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ размера $m \times n$ с SVD:

$$A = \sum_{i=1}^k \sigma_i \bar{u}^{(i)} \bar{v}^{(i)T} \quad (1)$$

Главная цель заключается в том, чтобы отобрать записи n -мерного вектора относительно распределения вероятностей на основе квадрата длины $p_x(i) = \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{v}^{(i)} \quad (2)$$

Для систем линейных уравнений \bar{x} является вектором решения, заданный как $\bar{x} = A^+b$, где A^+ — псевдообратная матрица Мура-Пенроуза. В соответствии с [5] коэффициенты λ_i в уравнении (2) задаются скалярным произведением:

$$\lambda_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \langle \bar{v}^{(i)}, A^T \bar{b} \rangle. \quad (3)$$

Квантово-инспирированные алгоритмы предполагают определение элементов матрицы A таким образом, чтобы обеспечивалось выполнение выборки на основе квадрата длины $p_x(i)$, что позволяет выбирать строки матрицы A с большой нормой. В связи с этим решение задач линейной алгебры квантово-инспирированными алгоритмами осуществляется в три этапа:

1. Выполняется аппроксимация SVD посредством алгоритма Frieze, Kannan и Vempala (далее — FKV) [7, 8] за счёт вычисления приближённых сингулярных значений $\tilde{\sigma}_i$, а также приближённых правых сингулярных векторов $\tilde{v}^{(i)}$.
2. На основе результатов первого этапа выполняется аппроксимация коэффициентов $\tilde{\lambda}_i$ с использованием метода оценки Монте-Карло.
3. Используя уравнение (2) и результаты предыдущих этапов, применяется выборка с отклонением для выполнения выборки на основе квадрата длины из приближённых векторов $\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i \tilde{v}^{(i)}$.

Следует отметить, что нововведениями квантово-инспирированных алгоритмов являются именно этапы 2 и 3. На данных этапах процессы оценки коэффициентов и выборки из всех векторов решений выполняются за время $O(\text{poly}(k, \kappa, \varepsilon, \log n, \log m))$. При этом в случае со стратегией FKV обычное вычисление коэффициентов и векторов решений из приближённого SVD на первом этапе требует $O(kn)$ временных затрат. Таким образом, асимптотически квантово-инспирированные алгоритмы достигают экспоненциального асимптотического ускорения от $O(n, m)$ до $\text{polylog}(n, m)$ за счёт полиномиальной зависимости от дополнительных параметров.

Аппроксимация сингулярного разложения

Алгоритм FKV представляет собой подход к вычислению аппроксимаций матриц низкого ранга и является примером рандомизированного метода расчёта приближённых матричных разложений. В соответствии с особенностями вероятностных алгоритмов построения приближённых матричных разложений [9, 10] подразумевается следующая стратегия: предварительная обработка матрицы для расчёта вероятностей выборки, создание выборок из матрицы, использование методов линейной алгебры для постобработки выборок с целью вычисления окончательного приближения.

Основная идея алгоритма FKV состоит в том, что вместо сингулярного разложения большой входной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ строится матрица $C \in \mathbb{R}^{r \times c}$ меньшего размера путём выборки r строк и c столбцов из матрицы A . Матрица C фиксирует ключевые свойства матрицы A , что позволяет выполнять SVD меньшей матрицы C для получения информации о сингулярных значениях и векторах матрицы A . Поскольку ранг матрицы C ограничен его размерностью, данный подход возможен только в тех случаях, когда матрица A имеет низкий ранг, либо когда достаточно её низкоранговой аппроксимации.

Преимуществом FKV является возможность выполнения алгоритма SVD значительно меньшей матрицы C исключительно за счёт аппроксимаций сингулярных значений и векторов исходной матрицы A . Введём обозначение $\tilde{\sigma}_l$ для сингулярных значений, а также $\tilde{w}^{(l)}$ для левых сингулярных векторов матрицы C . Алгоритм FKV напрямую обеспечивает аппроксимацию сингулярных значений с учётом $\tilde{\sigma}_l \approx \sigma_l$ при $l = 1, 2, \dots, k$. Приближённые правые сингулярные вектора $\tilde{v}^{(l)}$ матрицы A получаются как:

$$\tilde{v}^{(l)} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_l} R^T \tilde{w}^{(l)} \tag{4}$$

Тогда приближённые левые сингулярные вектора $\tilde{u}^{(l)}$ задаются формулой:

$$\tilde{u}^{(l)} = A \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_l^2} R^T \tilde{w}^{(l)} \right) \tag{5}$$

Качество аппроксимаций [11, 12] FKV зависит от количества r выбранных строк и c выбранных столбцов. Ключевая задача состоит в том, чтобы найти такие значения r и c , при которых не только получается удовлетворительное качество аппроксимации, но и обеспечивается значительно меньшая сложность вычисления SVD матрицы C в сравнении со сложностью вычисления SVD исходной матрицы A . То есть должны соблюдаться соответствующие условия, что $r \ll m$ и $c \ll n$.

Таким образом, допускается сделать утверждение, что FKV является ядром квантово-инспирированных алгоритмов для задач линейной алгебры. Без использования рандомизированного метода вычисления SVD матрицы A размера $m \times n$ требуется $O(\min(m^2n, mn^2))$ временных затрат, а в случае с вычислением SVD матрицы размера $r \times c$ на основе FKV — $O(\min\{r^2c, rc^2\})$. Дополнительно необходимо отметить, что для практических задач, в которых производительность применяемых в них алгоритмов значительно удалена от асимптотического предела [13], предпочтительно вычислять коэффициенты и векторы решений в явном виде на основе уравнений (4) и (5), начиная с приближённого SVD матрицы C в алгоритме FKV.

Оценка коэффициентов методом Монте-Карло

Коэффициенты λ из уравнения (2) в случае линейных систем являются результатом скалярного произведения между векторами, умноженным на степень сингулярных значений. Вычисление аппроксимации этих коэффициентов квантово-инспирированными алгоритмами выполняется на основе оценки Монте-Карло [14, 15, 16]. Для некоторых векторов \bar{y}, \bar{z} коэффициент λ вычисляется по формуле:

$$\lambda = \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i. \tag{6}$$

Принцип оценки скалярного произведения заключается в выполнении выборки на основе квадрата длины одного из векторов. Для этого возьмём вектор \bar{y} . Зададим случайную величину χ , которая принимает значения $\chi_i = y_i z_i / p_y(i)$, где индексы i выбираются из распределения квадрата длины $p_y(i) = y_i^2 / \|\bar{y}\|^2$. Тогда ожидаемое значение случайной величины удовлетворяет:

$$\mathbb{E}(\chi) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i z_i}{p_y(i)} p_y(i) = \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle = \lambda \tag{7}$$

С учётом дисперсии $\sigma_\chi^2 = \mathbb{E}(\chi^2) - (\mathbb{E}(\chi))^2$ случайной величины χ аналогично:

$$\mathbb{E}(\chi^2) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i z_i}{p_y(i)} \right)^2 p_y(i) = \|\bar{y}\|^2 \|\bar{z}\|^2 \tag{8}$$

Стратегия оценки коэффициентов λ состоит в том, чтобы взять N выборок $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots, \chi^{(N)}$ из χ и вычислить несмещённую оценку $\hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi^{(j)} \approx \lambda$.

Ошибка в оценке количественно определяется отношением между стандартным отклонением и средним значением оценщика:

$$\epsilon := \frac{\sqrt{D(\hat{\lambda})}}{|\hat{\lambda}|} \tag{9}$$

Дисперсия оценщика равняется $D(\hat{\lambda}) = \frac{\sigma_\chi^2}{N}$, тогда точность оценщика составляет:

$$\epsilon = \frac{\sigma_\chi}{|\hat{\lambda}| \sqrt{N}} \tag{10}$$

Полученный результат означает, что количество выборок N , необходимое для достижения точности ϵ с высокой степенью вероятности, равняется:

$$N = \frac{\sigma_\lambda^2}{\lambda^2 \epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{\|\bar{y}\|^2 \|\bar{z}\|^2}{\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle^2} - 1 \right] = \quad (11)$$

$$= O\left(\frac{\|\bar{y}\|^2 \|\bar{z}\|^2}{\epsilon^2 \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle^2} \right) = O\left(\frac{1}{\epsilon^2 \cos^2 \theta} \right)$$

где θ — угол между векторами \bar{y} и \bar{z} .

Сложность выполнения процесса оценки коэффициентов

Квантово-инспирированные алгоритмы отличаются от алгоритма FKV тем, что выполняют оценку коэффициентов λ , а не вычисляют их непосредственно из приближённого SVD входной матрицы. В связи с этим возникает необходимость в исследовании сложности выполнения процесса оценки коэффициентов. Для n -мерных случайных векторов ожидаемое значение угла между двумя векторами удовлетворяет условию $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\cos^2 \theta}\right] = n$, в связи с чем допускается ожидать, что количество необходимых выборок может линейно масштабироваться. В том случае, если $\frac{1}{\cos^2 \theta} = \text{poly}(m, n)$, то алгоритм более не имеет требуемой полилогарифмической сложности [17]. При этом важно отметить, что вне зависимости от используемой стратегии оценки коэффициентов, в наиболее негативном случае скалярные произведения векторов не могут быть аппроксимированы за сублинейное время.

Для систем линейных уравнений коэффициенты λ , равняются:

$$\lambda_l = \frac{1}{\sigma_l^2} \langle \bar{v}^{(l)}, A^T \bar{b} \rangle = \frac{1}{\sigma_l} \langle \bar{u}^{(l)}, \bar{b} \rangle \quad (12)$$

В соответствии с [5] стратегия заключается в выражении коэффициентов как $\lambda_l = \frac{1}{\sigma_l^2} \text{Tr}(A^T \bar{b} \bar{v}^{(l)T})$ и выборке элементов A_{ij} матрицы A . В этом случае количество выборок, необходимых для оценки, составляет:

$$N = \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\|\bar{v}^{(l)}\|^2 \|A\|_F^2 \|\bar{b}\|^2}{\langle \bar{v}^{(l)}, A^T \bar{b} \rangle^2} - 1 \right) = O\left(\frac{\|\bar{\sigma}\|^2 \|\bar{b}\|^2}{\epsilon^2 \sigma_l^2 \beta_l^2} \right), \quad (13)$$

где $\bar{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$;

$$\beta_l := \langle \bar{u}^{(l)}, \bar{b} \rangle;$$

$$\bar{b} = \sum_{l=1}^k \beta_l \bar{u}^{(l)};$$

$$\|A\|_F^2 = \|\bar{\sigma}\|^2.$$

В отдельных случаях, касаемых рекомендательных систем, коэффициенты пропорциональны скалярному

произведению $\langle A_i^T, \bar{v}^{(l)} \rangle$. С учётом $A_i = \sum_{l'=1}^k \sigma_{l'} u_i^{(l')} \bar{v}^{(l')T}$ получается:

$$\langle A_i^T, \bar{v}^{(l)} \rangle = \sum_{l'=1}^k \sigma_{l'} u_i^{(l')} \langle \bar{v}^{(l)}, \bar{v}^{(l')} \rangle = \sigma_l u_i^{(l)} \quad (14)$$

Тогда количество выборок удовлетворяет:

$$N = \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\|A_i^T\|^2 \|\bar{v}^{(l)}\|^2}{\langle A_i^T, \bar{v}^{(l)} \rangle^2} - 1 \right) = O\left(\frac{\sum_{l'=1}^k (\sigma_{l'} u_i^{(l')})^2}{\epsilon^2 \sigma_l^2 u_i^{(l)2}} \right) \quad (15)$$

Определим k -мерные векторы $\bar{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)^T$, $\bar{\mu} := (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(k)})^T$ и их произведение Адамара $\bar{v} = \bar{\sigma} \odot \bar{\mu}$ при $v_l = \sigma_l u_i^{(l)}$. Из это следует:

$$N = O\left(\frac{\|\bar{v}\|^2}{\epsilon^2 v_l^2} \right) \quad (16)$$

Во всех случаях количество выборок зависит от отношения между квадратом нормы k -мерного вектора и квадратом l -го элемента данного вектора. Далее для конкретизированности рассмотрим соотношение $\frac{\|\bar{\sigma}\|^2}{\sigma_l^2}$. Наибольшее соотношение имеет место для наименьшего сингулярного значения σ_{\min} , что предполагает:

$$\frac{\|\bar{\sigma}\|^2}{\sigma_{\min}^2} = \frac{\|\bar{\sigma}\|^2}{\sigma_{\max}^2} \frac{\sigma_{\max}^2}{\sigma_{\min}^2} = \frac{\|\bar{\sigma}\|^2}{\sigma_{\max}^2} \kappa^2 \quad (17)$$

Также данное соотношение может являться наибольшим при наименьшем значении σ_{\max} . Это происходит в том случае, когда наибольшие $k-1$ сингулярные значения равны друг другу. Тогда при условии $\sigma'_l := \frac{\sigma_l}{\|\bar{\sigma}\|}$, где $\|\bar{\sigma}'\| = 1$, получаем:

$$\|\bar{\sigma}'\|^2 = (\sigma'_{\max})^2 \left(k - 1 + \frac{1}{\kappa} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma'_{\max})^2 = \frac{1}{k - 1 + \frac{1}{\kappa}} = O(1/k) \quad (18)$$

Из этого следует:

$$\frac{\|\bar{\sigma}\|^2}{\sigma_{\max}^2} \kappa^2 = \frac{1}{(\sigma'_{\max})^2} \kappa^2 = O(k \kappa^2) \quad (19)$$

Установим $\kappa_\beta := \frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}$, где β_{\max} — наибольший и наименьший элементы соответствующих им векторов. Вследствие этого допускается сделать заключение о том, что количество выборок, необходимых для оценки коэффициентов в квантово-инспирированных алгоритмах для линейных систем составляет:

$$N = O\left(\frac{\kappa^2 \kappa^2 \kappa_\beta^2}{\epsilon^2}\right) \quad (20)$$

Выборка векторов решений

Этапы аппроксимации SVD и оценки коэффициентов обеспечивают приближённые сингулярные значения $\tilde{\sigma}_i$ и коэффициенты $\tilde{\lambda}_i$. Приближённые правые сингулярные вектора матрицы A определяются на основе уравнения (4), что позволяет неявно вычислить приближённый вектор решения $\tilde{x} = R^T \tilde{w}$, где:

$$\tilde{w} := \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\sigma}_i} \tilde{w}^{(i)} \quad (21)$$

Задача состоит в том, чтобы создать выборку из указанных векторов, используя только элементы \tilde{w} и R . Квантово-инспирированные алгоритмы достигают этого эффекта при помощи метода выборки с отклонением в несколько этапов:

1. Выбор строки со случайным индексом i .
2. Выбор столбца с индексом j из распределения на основе квадрата длины $q_i(j) = \frac{|R_{ij}|^2}{\|R_i\|^2}$.
3. Вывод j с вероятностью $\frac{|\langle \tilde{w}, R_{\cdot j} \rangle|^2}{\|R_{\cdot j}\|^2 \|\tilde{w}\|^2}$ или повторение выбора j .

Дополнительно стоит отметить, что ожидаемое число повторений перед выводом столбца с индексом j составляет

$$\frac{r \|\tilde{w}\|^2}{\sum_{j=1}^n |\langle \tilde{w}, R_{\cdot j} \rangle|^2} = \frac{r \|\tilde{w}\|^2}{\|\tilde{x}\|^2}.$$

Заключение

Проведённое исследование показывает, что квантово-инспирированные алгоритмы предполагают получение минимальной ошибки решения для задач с матрицами достаточно высокой размерности. Важно отметить, что для достижения максимальной точности требуется соблюдение условий низкого ранга и низкого числа обусловленности матрицы. По сравнению с ранее известными подходами, такими как алгоритм FKV, квантово-инспирированные алгоритмы отличаются использованием методов оценки коэффициентов и выборки из векторов решений. С одной стороны, прямое вычисление предполагает линейные временные затраты. С другой стороны, методы, основанные на выборках, полилогарифмически масштабируются в зависимости от размерности и сопрягаются с дополнительными полиномиальными издержками в отношении ранга матрицы, числа обусловленности и ошибки в оценке. При этом несмотря на асимптотическое масштабирование, методы для оценки коэффициентов не приводят к значительным улучшениям в рамках практического использования квантово-инспирированных алгоритмов по сравнению с прямыми вычислениями в классических алгоритмах. Таким образом, применение квантово-инспирированных алгоритмов становится целесообразным только для задач с матрицами чрезвычайно высокой размерности. Вместе с тем сложность квантово-инспирированных алгоритмов не зависит от ранга матрицы, что указывает на корректность их работы, в том числе и для задач с матрицами полного ранга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Quantum Technologies and Society: Towards a Different Spin / Ch. Coenen, A. Grinbaum, A. Grunwald [et al.] // NanoEthics. — 2022. — Vol. 16, No. 1. — P. 1–6. — DOI 10.1007/s11569-021-00409-4. — EDN JKAYUU.
2. Chia, Nai-Hui & Li, Tongyang & Lin, Han-Hsuan & Wang, Chunhao. (2019). Quantum-inspired classical sublinear-time algorithm for solving low-rank semidefinite programming via sampling approaches.
3. Tang, Ewin. (2018). A quantum-inspired classical algorithm for recommendation systems.
4. Масленников, В.В. Интерпретация задач классического машинного обучения в форме квадратичной неограниченной бинарной оптимизации / В.В. Масленников // Научный аспект. — 2023. — Т. 21, № 5. — С. 2722–2733. — EDN AEBTNB.
5. Gilyén, Andrés & Lloyd, Seth & Tang, Ewin. (2018). Quantum-inspired low-rank stochastic regression with logarithmic dependence on the dimension.
6. Maslov, V.P. Submathematics and Tropical Mathematics / V.P. Maslov // Mathematical Notes. — 2021. — Vol. 109, No. 1–2. — P. 241–246. — DOI 10.1134/S0001434621010272. — EDN CFEBLP.
7. Drineas, Petros & Frieze, Alan & Kannan, Ravindran & Vempala, S. & Vinay, V. (2004). Clustering Large Graphs via the Singular Value Decomposition. Machine Learning. 56. 9–33. 10.1023/B%3AMACH.0000033113.59016.96.
8. Frieze, Alan & Kannan, Ravindran & Vempala, Santosh. (1998). Fast Monte-Carlo algorithms for finding low-rank approximations. Journal of the ACM. 51. 370–378. 10.1109/SFCS.1998.743487.
9. Halko, Nathan & Martinsson, Per-Gunnar & Tropp, Joel. (2011). Finding Structure with Randomness: Probabilistic Algorithms for Constructing Approximate Matrix Decompositions. SIAM Review. 53. 217–288. 10.1137/090771806.
10. Kozhisseri, S. Quantum-probabilistic SVD: complex-valued factorization of matrix data / S. Kozhisseri, I.A. Surov // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. — 2022. — Vol. 22, No. 3. — P. 567–573. — DOI 10.17586/2226-1494-2022-22-3-567-573. — EDN NFHAWW.

11. Алищук, А.М. Анализ статистической аппроксимации характеристик многоэлементной системы связи в условиях многолучевого распространения сигнала / А.М. Алищук, М.А. Казакова, А.С. Гвоздарев // Математические методы в технологиях и технике. — 2022. — № 9. — С. 50–54. — DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_9_50. — EDN LCQBBZ.
12. Tan, W.H. MO-NFSA for solving unconstrained multi-objective optimization problems / W.H. Tan, Ju. Mohamad-Saleh // Engineering with Computers. — 2022. — Vol. 38, No. 3. — P. 2527–2548. — DOI 10.1007/s00366-020-01223-4. — EDN XGHQGM.
13. Хлопин, Д.В. О необходимых условиях обгоняющей оптимальности / Д.В. Хлопин // Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022): материалы Международной конференции, Екатеринбург, 27 июня — 01 2022 года / Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН; ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2022. — С. 244–248. — EDN НКНУВВ.
14. Саламатин, А.А. Оценка параметров модели процесса сверхкритической флюидной экстракции методом Монте-Карло / А.А. Саламатин, А.С. Халиуллина // Теоретические основы химической технологии. — 2022. — Т. 56, № 1. — С. 72–87. — DOI 10.31857/S0040357121060117. — EDN IQBIRN.
15. Making the most of data: Quantum Monte Carlo postanalysis revisited / T. Ichihba, A.J.W. Thom, V.A. Neufeld [et al.] // Physical Review E. — 2022. — Vol. 105, No. 4. — P. 045313. — DOI 10.1103/PhysRevE.105.045313. — EDN СТWLKP.
16. Confidence intervals for the reliability characteristics via different estimation methods for the power Lindley model / A.S. Yadav, P.K. Vishwakarma, H.S. Bakouch [et al.] // Reliability: Theory & Applications. — 2022. — Vol. 17, No. 4(71). — P. 392–412. — DOI 10.24412/1932-2321-2022-471-392-412. — EDN FWUTKJ.
17. Malyutin, A. Fair division algorithms with a small number of queries / A. Malyutin // Polynomial Computer Algebra: Proceedings of the International Conference, St. Petersburg, 02–07 мая 2022 года. — St. Petersburg: ООО «Издательство ВВМ», 2022. — P. 64–70. — EDN ТТWNTJ.

© Масленников Владимир Владимирович (vldmsn@yahoo.com)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»