КОММЕНТАРИЙ К ОДНОЙ СТАТЬЕ НЭЛСОНА

Мигранов Наиль Галиханович,
доктор физ.-мат. наук, профессор, Башкирский Государственный Педагогический Университет, г. Уфа
ufangm@yandex.ru
Войтик Виталий Викторович,
Аспирант, Башкирский Государственный Педагогический Университет, г. Уфа
voytik1@yandex.ru

Аннотация. *В статье исправляются требования наложенные Нэлсоном [1] на матрицу вращения для наиболее общего преобразования в жёсткую неинерциальную систему отсчёта. Эти требования соответствуют собственному вращению неинерциальной системы.*

Ключевые слова: *Нэлсон, матрица вращения, неинерциальная система отсчета*

COMMENTARY ON AN ARTICLE NELSON

Migranov Nail Galihanovich
Dr. of Physics and Mathematics, Professor, Bashkir State Pedagogical University, Ufa
Voitik Vitalii Viktorovich
graduate student, Bashkir State Pedagogical University, Ufa

Abstract. *We shall correct the requirements, which imposed Nelson on rotation matrix for the most general transformation into a rigid non-inertial frame of reference. These requirements are consistent the proper rotation non-inertial frame of reference.*

Keywords: *Nelson, rotation matrix, non-inertial reference system*

Введение

В статье [2] Нелсон предложил обобщённое лоренц-преобразование в произвольную жёсткую ускоренную систему отсчёта, которая вращается с частотой прецессии Томаса. Это преобразование далее в тексте будет именоваться специальным. Потом, в статье [1] это специальное преобразование было обобщено к другой математической форме, в которую входила матрица вращения. При этом данная матрица у Нелсона удовлетворяла некоторым дифференциальным уравнениям, которые описывают изменение матрицы вращения в лабораторной инерциальной системе отсчёта (формула (4) в [1]). Угловая скорость относительно осей ускоренной, вращающейся системы отсчёта у Нелсона пропорциональна обычной угловой скорости пространственного вращения относительно стационарной инерциальной системы отсчёта (формула (10) в [1]). Данные формулы вошли также в статью [3, формулы (8), (10), (11)]. Но как будет показано далее, данные формулы неправильны.

По нашему мнению статьи Нэлсона [1], [2] имеют очень важное значение для специальной теории относительности и несомненно будут изучаться исследователями. Поэтому в [2] необходимо избавиться от ошибок. В этом комментарии мы исправляем перечисленные требования Нэлсона, наложенные им на матрицу вращения для наиболее общего преобразования в жёсткую неинерциальную систему отсчёта.

1. Ускоренная и вращающаяся жёсткая система отсчёта

Общее преобразование в ускоренную и произвольно вращающуюся систему отсчёта выполняется двумя шагами [1]. Преобразование [1] между лабораторной инерциальной системой отсчёта $(t, \mathbf{x})$ и ускоренной и вращающейся с собственной частотой прецессии Томаса $(t^*, \mathbf{x}^*)$ в декартовых координатах могут быть переписано как $(c = 1)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \int_0^{t^*} \gamma \mathbf{V} dt^* + \frac{\gamma - 1}{V^2} (\mathbf{V}\mathbf{x}^*)\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$t = \int_0^{t^*} \gamma\, dt^* + \gamma\, \mathbf{V}\mathbf{x}^*, \tag{2}$$

где $\mathbf{V}$ – есть скорость начала ускоренной системы отсчёта и $\gamma = (1 - V^2)^{-1/2}$. Это первый шаг. Пространственно-временная метрика этой ускоренной и вращающейся системы отсчёта определяется из интервала

$$\begin{gathered} ds^2 = d\mathbf{x}^{*2} + 2(\Omega_T^* \times \mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* dt^* - \\ -\left[(1 + \mathbf{W}^* \mathbf{x})^2 - (\Omega_T^* \times \mathbf{x}^*)^2 \right] dt^{*2}, \end{gathered} \tag{3}$$

где Ω_T^*

$$\Omega_T^* = \frac{\gamma - 1}{V^2} \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt^*} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{V^2} \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{4}$$

есть хорошо известная собственная частота прецессии Томаса и $\mathbf{W}^*$

$$\begin{gathered} \mathbf{W}^* = \gamma \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt^*} + \frac{\gamma - 1}{V^2} (\mathbf{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt^*}) \mathbf{V} \right] = \\ = \gamma^2 \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\gamma - 1}{V^2} \left(\mathbf{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \mathbf{V} \right] \end{gathered} \tag{5}$$

есть собственное ускорение начала отсчёта $(t^*, \mathbf{x}^*)$.

Второй шаг есть стандартное преобразование вращения

$$x^{*i} = a^{ni} x'^n,\ t^* = t',\ (i, n = 1, 2, 3) \tag{6}$$

где a^{ni} есть матрица поворота. Оно выполняется для того, чтобы включить в себя собственную прецессию Томаса. При подстановке (6) в (1), (2) получается результирующее общее преобразование

$$x^i = \left\{ a^{ni} x^n + \frac{\gamma - 1}{V^2} (V^m a^{nm} x'^n) V^i \right\} + \int_0^t \gamma V^i dt', \tag{7}$$

$$t = \gamma V^i a^{ni} x'^n + \int_0^t \gamma\, dt'. \tag{8}$$

2. Соотношения, которым должна удовлетворять матрица вращения по мнению Нэлсона

По мнению Нэлсона, коэффициенты a^{ni} представляют собой матрицу вращения, что удовлетворяет соотношения ортогональности

$$a^{ni} a^{nk} = a^{in} a^{kn} = \delta^{ik} \tag{9}$$

и (уравнение (4) в [1])

$$\frac{da^{ni}}{dt} = (\omega^{mi} + \Omega^{mi}) a^{nm}, \tag{10}$$

где ω^{mi} есть обычно пространственное вращение, угловая скорость,

$$\Omega^{mi} = -\frac{1}{V^2} (\gamma - 1)(V^m \frac{dV^i}{dt} - V^i \frac{dV^m}{dt}) \tag{11}$$

есть частота прецессии Томаса (уравнение (5) в [1]), и $\frac{dV^i}{dt}$ есть ускорение неинерциальной системы в лабораторной инерциальной системе. Угловая скорость относительно осей ускоренной и вращающейся системы есть (уравнение (10) в [1])

$$\omega'^{jk} = \gamma\, a^{ja} a^{kb} \omega^{ab}. \tag{12}$$

Умножим теперь уравнение (12) на величину $\frac{1}{\gamma} a^{jm} a^{ki}$. Получим, что

$$\begin{gathered} \frac{1}{\gamma} a^{jm} a^{ki} \omega'^{jk} = \frac{1}{\gamma} a^{jm} a^{ki} \cdot \gamma\, a^{ja} a^{kb} \omega^{ab} = \\ = (a^{jm} a^{ja})(a^{ki} a^{kb}) \omega^{ab} = \delta^{ma} \delta^{ib} \omega^{ab} = \omega^{mi} \end{gathered} \tag{13}$$

Подставим теперь (11) и ω^{mi} из левой части (13) в уравнение (10). В результате получим, что

$$\begin{gathered} \frac{da^{ni}}{dt} = (\omega^{mi} + \Omega^{mi}) a^{nm} = \omega^{mi} a^{nm} + \Omega^{mi} a^{nm} = \\ = \frac{1}{\gamma} (a^{jm} a^{nm}) a^{ki} \omega'^{jk} - \frac{\gamma - 1}{V^2} \left(V^m \frac{dV^i}{dt} - V^i \frac{dV^m}{dt} \right) a^{nm} = \\ = \frac{1}{\gamma} a^{ki} \omega'^{nk} - \frac{\gamma - 1}{V^2} \left(V^m \frac{dV^i}{dt} - V^i \frac{dV^m}{dt} \right) a^{nm}. \end{gathered} \tag{14}$$

Учитывая, что

$$dt = \gamma\, dt', \tag{15}$$

то подставив (15) в (14) и умножив получившееся уравнение на γ окончательно получим, что

$$\frac{da^{ni}}{dt'} = a^{ki}\omega'^{nk} - \frac{\gamma - 1}{V^2}\left(V^m \frac{dV^i}{dt'} - V^i \frac{dV^m}{dt'}\right) a^{nn}. \quad (16)$$

3. Альтернативные соотношения для матрицы вращения

Чтобы неинерциальная система отсчёта оставалась жёсткой матрица вращения a^{ni} должна быть собственной и должна удовлетворять соотношениям ортогональности (9) и равенствам «уничтожения»

$$e^{kmi}a^{ml}a^{in} = e^{aln}a^{ka}, \quad e^{kmi}a^{lm}a^{ni} = e^{aln}a^{ak} \quad (17)$$

Уравнения (9) и (17) могут быть проверены в произвольных угловых координатах, например эйлеровских углах.

В системе $(t', \mathbf{x}')$ изменение произвольного вектора $\mathbf{x}'$ связанного с системой отсчёта $(t^*, \mathbf{x}^*)$ подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = -\omega' \times \mathbf{x}'. \quad (18)$$

В матричной форме это уравнение выглядит в виде

$$\frac{dx'^n}{dt'} = -e^{nmk}\omega'^m x'^k. \quad (19)$$

Здесь ω' есть вектор угловой скорости вращения осей системы $(t', \mathbf{x}')$ относительно системы $(t^*, \mathbf{x}^*)$ выраженный в системе координат $(t', \mathbf{x}')$. Обратное преобразование к (6) есть

$$x'^n = a^{ni}x^{*i} \quad (20)$$

Подставляя в (19) равенство (20) и считая, что $x^{*i} = const$ получим, что эта матрица должна удовлетворять уравнению

$$\frac{da^{ni}}{dt'} = -e^{nmk}\omega'^m a^{ki}. \quad (21)$$

В уравнении (21) матрица вращения зависит только от угловой скорости $\omega'^{nk}(t')$ относительно осей ускоренной и вращающейся системы отсчёта, но не от скорости орбитального движения (в отличие от (16)).

4. Применимость альтернативных равенств к общему принципу форминвариантности

Если уравнение (21) есть правильное уравнение, то после преобразования (6) интервал должен остаться такой же математической формы как и (3). Это есть принцип общей форминвариантности [4]. Проверим это. Продифференцируем (6)

$$dx^{*i} = a^{ni}dx'^n + \frac{da^{ni}}{dt'}x'^n dt' =$$
$$= a^{ni}dx'^n - e^{nmk}\omega'^m a^{ki}x'^n dt'$$

и вынесем матрицу вращения за скобки

$$dx^{*i} = a^{ki}(dx'^k - e^{nmk}\omega'^m x'^n dt') =$$
$$= a^{ki}(dx'^k + e^{kmn}\omega'^m x'^n dt') =$$
$$= a^{ki}(d\mathbf{x}' + \omega' \times \mathbf{x}'dt')^k. \quad (22)$$

Тогда

$$d\mathbf{x}^{*2} = \left[a^{ki}(d\mathbf{x}' + \omega' \times \mathbf{x}'dt')^k\right]^2 =$$
$$a^{ki}(d\mathbf{x}' + \omega' \times \mathbf{x}'dt')^k a^{ni}(d\mathbf{x}' + \omega' \times \mathbf{x}'dt')^n =$$
$$= (d\mathbf{x}' + \omega' \times \mathbf{x}'dt')^2. \quad (23)$$

Вычислим теперь $(\Omega_T^* \times \mathbf{x}^*)^2$ и $(\Omega_T^* \times \mathbf{x}^*)d\mathbf{x}^*$. Эти выражения есть скаляры, поэтому они не зависят от матрицы вращения. Подставим в эти выражения (6) и

$$\Omega_T^{*m} = a^{lm}\Omega_T'^l, \quad (24)$$

где вектор Ω_T' есть обратное преобразование к (24)

$$\Omega_T'^m = a^{ml}\Omega_T^{*l}. \quad (25)$$

Получим

$$(\Omega_T^* \times \mathbf{x}^*)^2 = (e^{kmi}\Omega_T^{*m}x^{*i})^2 =$$
$$(e^{kmi}a^{lm}\Omega_T'^l a^{ni}x'^n)^2 = \left[(e^{kmi}a^{lm}a^{ni})\Omega_T'^l x'^n\right]^2$$

Теперь воспользуемся вторым равенством (17). Получим

$$\left[(e^{kmi}a^{lm}a^{ni})\Omega_T'^{l}x'^{n}\right]^2 = (e^{aln}a^{ak}\Omega_T'^{l}x'^{n})^2 =$$
$$=\left[a^{ak}(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^a\right]^2 = a^{ak}(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^a a^{bk}(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^b =$$
$$=\delta^{ab}(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^a(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^b = (\Omega_T'\times\mathbf{x}')^2$$

То есть

$$(\Omega_T^*\times\mathbf{x}^*)^2 = (\Omega_T'\times\mathbf{x}')^2 \tag{26}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&(\Omega_T^*\times\mathbf{x}^*)d\mathbf{x}^* = e^{kmi}\Omega_T^{*m}x^{*i}dx^{*k} =\\
&= e^{kmi}(a^{lm}\Omega_T'^{l})(a^{ni}x'^{n})a^{bk}(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^b =\\
&= e^{kmi}(a^{lm}\Omega_T'^{l})(a^{ni}x'^{n})a^{bk}(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^b =\\
&= (e^{kmi}a^{lm}a^{ni})a^{bk}\Omega_T'^{l}x'^{n}(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^b =\\
&= e^{aln}a^{ak}a^{bk}\Omega_T'^{l}x'^{n}(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^b =\\
&= e^{aln}\delta^{ab}\Omega_T'^{l}x'^{n}(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^b =\\
&= e^{bln}\Omega_T'^{l}x'^{n}(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^b =\\
&= (\Omega_T'\times\mathbf{x}')(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt').
\end{aligned} \tag{27}$$

Подставим (23), (26) и (27) в (3). Получим, что

$$\begin{aligned}
&ds^2 = (d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')^2 +\\
&+2(\Omega_T'\times\mathbf{x}')(d\mathbf{x}'+\omega'\times\mathbf{x}'dt')dt' -\\
&-\left[(1+W^{*i}a^{ni}x'^{n})^2-(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^2\right]dt'^2 =\\
&= d\mathbf{x}'^2 + 2(\omega'\times\mathbf{x}')d\mathbf{x}'dt' + (\omega'\times\mathbf{x}')^2dt'^2 +\\
&+2(\Omega_T'\times\mathbf{x}')d\mathbf{x}'dt' + 2(\Omega_T'\times\mathbf{x}')(\omega'\times\mathbf{x}')dt'^2 -\\
&-\left[(1+W^{*i}a^{ni}x'^{n})^2-(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^2\right]dt'^2 =\\
&= d\mathbf{x}'^2 + 2(\omega'\times\mathbf{x}')d\mathbf{x}'dt' + 2(\Omega_T'\times\mathbf{x}')d\mathbf{x}'dt' -\\
&-\begin{bmatrix}(1+W^{i}a^{ni}x'^{n})^2-(\Omega_T'\times\mathbf{x}')^2 -\\ -2(\Omega_T'\times\mathbf{x}')(\omega'\times\mathbf{x}')-(\omega'\times\mathbf{x}')^2\end{bmatrix}dt'^2 =\\
&= d\mathbf{x}'^2 + 2\left[(\Omega_T'+\omega')\times\mathbf{x}'\right]d\mathbf{x}'dt' -\\
&-\left[(1+a^{ni}W^{*i}\cdot x'^{n})^2-\left\{\left[(\Omega_T'+\omega')\times\mathbf{x}'\right]\right\}^2\right]dt'^2.
\end{aligned}$$

Мы видим, что получился интервал такого же вида как (3), но с новым собственным ускорением и новой угловой скоростью равными

$$W'^{n} = a^{ni}W^{*i}\ , \tag{28}$$

$$\Omega'^{m} = \Omega_T'^{m} + \omega'^{m}, \tag{29}$$

где $\Omega_T'^{m}$ есть (25). Таким образом, принцип общей форминвариантности при преобразовании вращения выполняется и система отсчёта остаётся жёсткой.

Обсуждение

Общее число степеней свободы твёрдого тела равно 6, причём теория относительности не изменяет его. Поэтому в произвольной системе отсчёта угловые координаты отвечающие за собственное вращение не могут зависеть от компонент орбитальной скорости $\mathbf{V}$. Однако из уравнения (16) мы видим, что у Нэлсона коэффициенты a^{ni} зависят не только от угловой скорости $\omega'^{nk}(t')$ относительно осей ускоренной и вращающейся системы отсчёта, но также и от скорости орбитального движения (второй член в правой части (16)).

Уравнение (10) означает, что под коэффициентами a^{ni} Нелсон понимал матрицу вращения в лабораторной системе отсчёта. Напротив, под a^{ni} мы понимаем собственную матрицу вращения.

Вывод

Требования Нэлсона (10), (12) для собственной матрицы вращения неправильны и коэффициенты a^{ni} входящие в (16) не являются матрицей вращения жёсткой системы координат. Соотношения (9), (17), (21) – правильные уравнения, которым должна удовлетворять собственная матрица вращения, чтобы движущаяся неинерциальная система оставалась жёсткой.

Список литературы

1. R.A. Nelson, “Erratum: Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference [J. Math. Phys. 28, 2379-2383 (1987)]”, J. Math. Phys., 35, pp. 6224-6225 (1994).
2. R.A. Nelson, “Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference”, J. Math. Phys. 28, 2379-2383 (1987).
3. H. Nikolić, “Relativistic contraction and related effects in noninertial frames”, Phys. Rev. A 61, 032109 (2000)
4. V.V. Voytik, “The general form-invariance principle”, Grav. and Cosm., v. 17, 3, 218–223 (2011).