DOI 10.37882/2223–2966.2022.03.10

ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕНИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ТЕЛЕГРАФНОЙ ЛИНИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ

Горюнов Александр Владимирович
К.ф.- м.н., доцент, Московский Авиационный Институт
msgor@mail.ru
Костиков Юрий Александрович
К.ф.- м.н., доцент, Московский Авиационный Институт
jkostikov@mail.ru
Прокофьев Александр Иванович
К.ф.- м.н., доцент, Московский Авиационный Институт
prokofev812@gmail.com
Романенков Александр Михайлович
К.т.н., доцент, Московский Авиационный Институт
romanaleks@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается телеграфное уравнение, являющиеся важным частным случаем для уравнения Максвелла для распространения тока по проводам. Решением телеграфного уравнения является функция распределения электрического напряжения в ограниченном проводе. Предложен оригинальный метод получения точного решения краевой задачи с нетривиальным граничным условием. Введена серия вспомогательных функций, что позволило свести к классической одномерной задаче о колебании струны с условиями Дирихле на концах провода. Методом разделения переменных было получено точное решение в виде сходящегося ряда Фурье.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, краевая задача, точные решения.

THE PROBLEM OF VOLTAGE IN A BOUNDED TELEGRAPH LINE WITH PERIODIC VOLTAGE PERTURBATION AT THE LEFT END

A. Goryunov
Yu. Kostikov
A. Prokofiev
A. Romanenkov

Summary. The paper considers the telegraph equation, which is an important special case for the Maxwell equation for current propagation through wires. The solution of the telegraph equation is the distribution function of the electric voltage in a bounded wire. An original method for obtaining an exact solution of a boundary value problem with a nontrivial boundary condition is proposed. A series of auxiliary functions was introduced, which made it possible to reduce to the classical one-dimensional problem of string oscillation with Dirichlet conditions at the ends of the wire. By the method of separation of variables, an exact solution was obtained in the form of a convergent Fourier series.

Keywords: telegraphic equation, boundary value problem, exact solutions.

Введение

Получение точного решения обеспечивает возможность более быстрых расчетов телеграфных линий и открывает возможность более гибкого их проектирования.

Следуя [1], рассмотрим ограниченную телеграфную линию длины l. С распределенными параметрами C, L, R, G, где C — емкость на единицу длины, L — индуктивность на единицу длины, R — сопротивление на единицу длины, G — проводимость на единицу длины (см. [4], [5]). Будем считать, что правый конец линии заземлен, а левый конец подключен к источнику питания, который подает напряжение по гармоническому закону:

$$v(t) = V\sin\omega t,$$

где V — амплитуда напряжения, ω — частота. Предполагаем так же, что в начальный момент времени в линии нет ни тока, ни напряжения. Пусть $u = u(x,t)$ — распределение напряжения в такой телеграфной линии. Установлено, что эта функция является решением однородной гиперболической задачи [6], [7]:

$$\alpha^2 u_{tt} + 2\beta u_t + \gamma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = v(t), u|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

где $\alpha^2 = \sqrt{CL}, \beta = \frac{CR+LG}{2}, \gamma^2 = RG$.

Постановка задачи.

Для поиска решения этой задачи обнулим краевые условия (2). Для этого введем новую функцию $w(x,t)$, которая определяется уравнением:

$$u = w + \left(1 - \frac{x}{l}\right)v. \quad (4)$$

Тогда краевые условия (2) для функции w перепишутся следующим образом:

$$u|_{x=0} = w|_{x=0} + v = v, u|_{x=l} = w|_{x=l} = 0,$$

то есть

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Далее, необходимо пересчитать в новой переменной уравнение (1) и начальные условия (3) для него. Выполним пересчет производных:

$$u_t = w_t + \left(1 - \frac{x}{l}\right)v_t, u_{tt} = w_{tt} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)v_{tt}, \quad (6)$$

$$u_x = w_x - \frac{1}{l}v, u_{xx} = w_{xx}. \quad (7)$$

Подставим выражения из (6) и (7) в уравнение (1):

$$\alpha^2 w_{tt} + 2\beta w_t + \gamma^2 w - w_{xx} + \alpha^2\left(1 - \frac{x}{l}\right)v_{tt} +$$
$$+ \gamma^2\left(1 - \frac{x}{l}\right)v = 0. \quad (8)$$

Начальные условия примут следующий вид:

$$u|_{t=0} = w|_{t=0} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)v(0) = 0, u_t|_{t=0} =$$
$$= w_t|_{t=0} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)v_t(0) = 0,$$

то есть

$$w|_{t=0} = -\left(1 - \frac{x}{l}\right)v(0),$$
$$w_t|_{t=0} = -\left(1 - \frac{x}{l}\right)v_t(0). \quad (9)$$

Иными словами, возникает неоднородная краевая задача для уравнения (8) с краевыми условиями (5) и начальными условиями (9).

Пусть далее,

$$g(x,t) = -\left(1 - \frac{x}{l}\right)(\alpha^2 v_{tt} + \gamma^2 v), \quad (10)$$

тогда уравнение (8) примет следующий вид

$$\alpha^2 w_{tt} + 2\beta w_t + \gamma^2 w - w_{xx} = g(x,t). \quad (11)$$

Следующим шагом из уравнения (11) уберем слагаемое с первой производной по времени. Для этого введем новую функцию $z(x,t)$, такую что:

$$w = ze^{\kappa t}, \quad (12)$$

где κ — числовой параметр, который будет определен позднее. Заметим, что

$$w_{xx} = z_{xx}e^{\kappa t}, w_t = (z_t + \kappa z)e^{\kappa t},$$

$$w_{tt} = (z_{tt} + 2\kappa z_t + \kappa^2 z)e^{\kappa t},$$

и после подстановки в (11) при $\kappa = -\frac{\beta}{\alpha^2}$ получим:

$$\alpha^2 z_{tt} + \left(\gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)z - z_{xx} = g(x,t)e^{\frac{\beta t}{\alpha^2}}. \quad (12)$$

Отметим, что при замене (12) краевые условия на функцию z совпадут с условиями (5). Начальные условия (9) примут вид:

$$z|_{t=0} = -\left(1-\frac{x}{l}\right)v(0), z_t|_{t=0} =$$

$$= \left(1-\frac{x}{l}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha^2}v(0)-v_t(0)\right). \quad (13)$$

Рассмотрим однородное уравнение:

$$\alpha^2 z_{tt} + \left(\gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)z - z_{xx} = 0,$$

для которого применим метод Фурье [3]. А именно, потребуем, чтобы

$$z = X(x)T(t),$$

откуда следует, что

$$\frac{\alpha^2 T''}{T} + \left(\gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = \frac{X''}{X}. \quad (13)$$

Тогда возникает классическая задача Штурма-Лиувилля:

$$\frac{X''}{X} = \lambda, X(0) = X(l) = 0,$$

решение которой известно. Итак, имеем счетный набор собственных чисел

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad (14)$$

и отвечающим им набор собственных функции

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{l}, n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

Теперь получим разложение в ряд Фурье по системе функции X_n функцию $g(x,t)$ из (10) и начальные условия (13). Несложно получить, что

$$1-\frac{x}{l} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

тогда

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(\alpha^2 v_{tt} + \gamma^2 v)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}, \quad (16)$$

$$z|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2v(0)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}, \quad (17)$$

$$z_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-\frac{\beta}{\alpha^2}v(0)-v_t(0)\right)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}. \quad (18)$$

Для каждого натурального значения n получаем, что

$$z_n = T_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}. \quad (19)$$

Подставим (19) в уравнение (12) и с учетом (16) и линейной независимости собственных функции задачи Штурма-Лиувилля получим, что

$$\alpha^2 T_n'' + \left(\gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)T_n =$$

$$= \frac{-2(\alpha^2 v_{tt} + \gamma^2 v)}{\pi n}, \quad (20)$$

и выполняются начальные условия

$$T_n(0) = 2\frac{v(0)}{\pi n}, T_n'(0) = -2\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha^2}v(0)+v_t(0)\right)}{\pi n}, \quad (21)$$

Решением уравнения (20) является функция

$$T_n = c_{1n}e^{\mu_{1n}t} + c_{2n}e^{\mathrm{M}_{2n}t} + S_n(v), \quad (22)$$

где $S_n(v)$ — функция, определяющаяся по правой части уравнения (20), явную формулу для этой функции можно найти, например, в [2]; а μ_{1n}, μ_{2n} — корни характеристического уравнения:

$$\alpha^2\mu_n^2 + \gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = 0, \quad (23)$$

которые могут быть как действительными, так и чисто мнимыми.

Получим, далее, явные формулы для решения. С учетом вида функции v, заметим, что в правой части уравнения (20)

$$\alpha^2 v_{tt} + \gamma^2 v = (-\alpha^2\omega^2 + \gamma^2)V\sin\omega t,$$

далее, в (21) имеем

$$T_n(0) = 0, T_n'(0) = -2\frac{\omega V}{\pi n}. \quad (24)$$

В уравнении (20) выражение

$$\left(\gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)$$

может быть как положительным, так и отрицательным, но для все возможных натуральных n отрицательное значение оно примет только для конечного набора значений n.

Пусть $N_1 := \left\{n | n \in \mathbb{N} \; and \; \gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 < 0\right\}$.

Далее, пусть $-\sigma_n^2 = \gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$.

Тогда $\forall n \in N_1$ имеем

$$T_n = c_{1n}e^{\frac{\sigma_n t}{\alpha}} + c_{2n}e^{-\frac{\sigma_n t}{\alpha}} + \frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} V\sin\omega t, \quad (25)$$

и из начальных условий найдем, что

$$c_{1n} = -\frac{\alpha}{2\sigma_n}\left(\frac{\omega V(\alpha^2\omega^2 - \gamma^2)}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} + \frac{2\omega V}{\pi n}\right), c_{2n} = \frac{\alpha}{2\sigma_n}\left(\frac{\omega V(\alpha^2\omega^2 - \gamma^2)}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} + \frac{2\omega V}{\pi n}\right)$$

и

$$z = \sum_{n \in N_1}\left(\frac{\alpha}{2\sigma_n}\left(\frac{\omega V(\alpha^2\omega^2 - \gamma^2)}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} + \frac{2\omega V}{\pi n}\right)\left(-e^{\frac{\sigma_n t}{\alpha}} + e^{-\frac{\sigma_n t}{\alpha}}\right) + \frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} V\sin\omega t\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

Далее, опираясь на формулы (4) и (12), получим, что

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right)V\sin\omega t + \sum_{n \in N_1}\left(\frac{\alpha\omega V}{2\sigma_n}\left(\frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} + \frac{2}{\pi n}\right)\left(-e^{\left(\frac{\sigma_n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)t} + e^{-\left(\frac{\sigma_n t}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right)t}\right) + \frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \sigma_n^2)} V\sin\omega t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \quad (26)$$

Пусть теперь

$$N_2 := \left\{n | n \in \mathbb{N} \; and \; \gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 > 0\right\}.$$

Введем обозначение

$$\zeta_n^2 = \gamma^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Тогда $\forall n \in N_2$ и $\omega^2 \neq \zeta_n^2$ имеем

$$T_n = c_{1n}\sin\frac{\zeta_n}{\alpha}t + c_{2n}\cos\frac{\zeta_n}{\alpha}t + \frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 - \zeta_n^2)} V\sin\omega t, \quad (27)$$

и из начальных условий найдем, что

$$c_{1n} = -\frac{\alpha\omega V}{2\zeta_n}\left(\frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 - \zeta_n^2)} + \frac{2}{\pi n}\right), c_{2n} = 0$$

и

$$z = \sum_{n \in N_2}\left(-\frac{\alpha\omega V}{2\zeta_n}\left(\frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 - \zeta_n^2)} + \frac{2}{\pi n}\right)\sin\frac{\zeta_n}{\alpha}t + \frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 - \zeta_n^2)} V\sin\omega t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Далее, опираясь на формулы (4) и (12), получим, что

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right)V\sin\omega t + \sum_{n \in N_2}\left(-\frac{\alpha\omega V}{2\zeta_n}\left(\frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \zeta_n^2)} + \frac{2}{\pi n}\right)\sin\frac{\zeta_n}{\alpha}t + \frac{\alpha^2\omega^2 - \gamma^2}{\pi n(\alpha^2\omega^2 + \zeta_n^2)} V\sin\omega t\right)e^{-\frac{\beta}{\alpha^2}t}\sin\frac{\pi n x}{l} \quad (28)$$

Для резонансного случая $\alpha^2\omega^2 = \zeta_n^2$ решение, определяемое по формуле (27), заменится на

$$T_n = c_{1n}\sin\omega t + c_{2n}\cos\omega t + t(A\sin\omega t + B\cos\omega t), \quad (29)$$

Константы из (29) также могут быть определены из начальных условий и получена формула для точного решения в виде ряда Фурье аналогичная (28).

Заключение

В работе рассмотрена начально-краевая задача для одномерного телеграфного уравнения с нетривиальным краевым условием. С помощью удачной замены и метода разделения переменных удалось свести решение этой задаче к известной задаче о колебании одномерной ограниченной струны, что позволило предложить метод построения решения в виде ряда Фурье. Результаты работа могут найти применение при практическом расчете телеграфных линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агошков В.И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики. М.: Физматлит, 2002.— 320 с.
2. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003. —303 с.
3. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными / Олейник О. А.— Москва: Лаборатория знаний, 2020.— 261 с.— ISBN978–5–00101–703–5.
4. Wiliam H. Hayt. Engineering Electromagnetics (англ.).— Fifth.— New York, NY: McGraw-Hill Education, 1989.— P. 382–392.— ISBN0070274061.
5. Matthew N. O. Sadiku. Elements of Electromagnetics (англ.).— First.— Orlando, Florida: Saunders College Publishing (англ.)рус. , 1989.— P. 497–505.— ISBN993013846.
6. Georges Metzger. Transmission Lines with Pulse Excitation (англ.).— First.— New York, NY: Academic Press, 1969.— P. 1–10.
7. Stanley V. Marshall. Electromagnetic Concepts & Applications (англ.).— Second.— New York, NY: Prentice-Hall, 1987.— P. 369–372.— ISBN0132490048.

Московский авиационный институт