

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СХОДСТВА ТЕМПОРАЛЬНЫХ ОРГРАФОВ

PROBLEMS AND METHODS OF TEMPORAL DIGRAPHS SIMILARITY DETERMINING

V. Kokhov

Annotation

28 classes of determining the T-digraphs' similarity problem are suggested. The methodology of solving the problems, which includes three approaches based on: 1) supergraphs; 2) maximum common fragments; 3) supergraphs invariants is proposed. A procedure of constructing the system of supergraphs, which takes into account half-path arrangement information, is described. Examples of solving the problems are given.

Keywords: Temporal digraph. Invariant. Supergraph. Similarity problem.

Кохов Виктор Викторович

Аспирант, Национальный исследовательский университет Московский Энергетический институт, НИУ-МЭИ

Аннотация

В работе предложены 28 видов задач определения сходства T-орграфов. Предложена методология решения задач, включающая три подхода на основе: 1) надграфов; 2) наибольших общих фрагментов; 3) инвариантов надграфов. Описан метод построения системы надграфов, учитывающих расположения полупутьей. Приведены примеры решения задач.

Ключевые слова:

Темпоральный орграф. Инвариант. Надграф. Задачи определения сходства.

1. Введение

Работа [1] – одна из первых по графодинамике, т.е. по динамическому описанию структур с использованием орграфов. В темпоральных орграфах (T-орграфах) структура изменяется во времени, и задача состоит в изучении динамики этой структуры. Совокупность методов описания и изучения таких систем была названа "графодинамикой" [1]. В ней в качестве наиболее важных выделялись: 1) задача определения расстояния, дающего представления о стабильности изменений структуры по отношению к малым возмущениям и о монотонности в смысле этого расстояния процессов; 2) задача определения в орграфе фрагмента, который не меняется или "мало" меняется во времени. В связи с расширением сфер практической применимости и в особенности при разработке новых поколений систем искусственного интеллекта, при анализе темпоральных сетей (компьютерных, социальных, коммуникационных и др.) с 2006 года актуализировались исследования по графодинамике [2–7]. В [3, 4] выделены в качестве актуальных прикладных задач следующие: 1) задача анализа изменений во времени структур корпоративных социальных сетей (КСС), в особенности, сетей коммуникаций сотрудников фирмы; 2) задача установления направления изменения структуры сети с целью повышения обоснованности управленческих решений и др. Как выделено в [3], управление КСС и их структурой – новая область менеджмента. Однако

область исследования T-орграфов и T-сетей недостаточно раскрыта в современной литературе. В [6] предложены два метода, позволяющие на основе моделей сложности исследовать изменения локальных и глобальных свойств T-орграфов, определять сходство T-орграфов на основе моделей сложности и выявлять тенденции изменения их свойств. В [7] с целью выявления монотонности процесса изменения сходства структур T-орграфов выделены два класса задач анализа сходства: 1) сходство структур одного T-орграфа; 2) сходство структур двух T-орграфов. Описаны два подхода к решению задач: подход на основе использования инвариантов T-орграфов, подструктурный (П-подход), и проведен их сравнительный анализ. В данной работе с целью всестороннего исследования сходства T-орграфов выделены два класса задач анализа сходства, включающие 28 видов задач, и методология их решения, объединяющая и обобщающая ранее известные подходы на основе использования системы надграфов структур T-орграфов и их инвариантов.

Предложенная методология позволяет получать более точные результаты определения сходства на основе характеристики T-орграфа системой надграфов, в которых дополнительно учитывается точное расположение фрагментов. С целью более эффективного вычисления мер сходства T-орграфов методология включает метод последовательно уточняющей характеристики T-орграфа и

его надграфов с использованием оригинальных инвариантов, характеризующих достаточно точно как сам Т-орграф, так и его надграфы. Для выявления монотонности изменения структур Т-орграфов предлагаются оригинальные характеристики определения расстояния (индексов сходства) между парой Т-орграфов или между структурами одного Т-орграфа и его надграфов.

2. Основные определения

Тройку $G = \langle V(t), E(t), T \rangle$ назовем Т-орграфом, где V^t – множество вершин орграфа в момент времени t с числом вершин $|V^t| = p^t$, $T = \{1, \dots, N\}$ – множество натуральных чисел, определяющих (дискретное) время, $E(t)$ семейство соответствий или отображений $\Gamma t \in E^t$ множества вершин V^t в себя в момент времени $t \in T$, т.е. $(\forall t \in T) \Gamma t: V^t \rightarrow V^t$. Через tG обозначим Т-орграф в момент времени t . При удалении вершин и смежным к ним дуг в tG получаем его порожденный подграф, а при удалении одной или нескольких дуг получаем подграф (ниже фрагмент) f .

Орграф

$$t_1G = \langle V^{(t_1)}, E^{(t_1)}, T \rangle$$

изоморфен орграфу

$$t_2G = \langle V^{(t_2)}, E^{(t_2)}, T \rangle (t_1G \approx t_2G),$$

если

$$\exists \varphi: (V^{(t_1)} \rightarrow V^{(t_2)}) \& (\forall v_i, v_j \in V^{(t_1)})$$

где

$$\varphi(v_i), \varphi(v_j) \in V^{(t_2)}$$

Множество всех изоморфизмов tG на себя образует группу $Aut(tG)$. Орграф

$$t_1G = \langle V^{(t_1)}, E^{(t_1)}, T \rangle$$

изоморфно вкладывается в орграф

$$t_2G = \langle V^{(t_2)}, E^{(t_2)}, T \rangle$$

как фрагмент, если в t_2G есть фрагмент

$$f \approx t_1G.$$

Если фрагмент f является индуцированным подграфом (подграфом) в t_2G , то примем обозначение

$$t_1G \subseteq^{IS} t_2G (t_1G \subseteq^S t_2G).$$

Под максимальным общим подграфом MCS (индуцированным подграфом $[MCIS]$) для t_1G, t_2G понимаем фрагмент

$$f1 = t_{1,2}G^* = \langle V^{(t_{1,2})}, E^{(t_{1,2})}, T \rangle$$

для которого справедливы условия:

а)

$$t_{1,2}G^* \subseteq^S t_1G (t_{1,2}G^* \subseteq^{IS} t_1G)$$

и

$$t_{1,2}G^* \subseteq^S t_2G (t_{1,2}G^* \subseteq^{IS} t_2G);$$

б) не существует большего по числу вершин (дуг) фрагмента $t_{1,2}G^*$ в t_1G , для которого выполняется условие а.

Отличительная особенность Т-орграфов от орграфов связана с необязательным выполнением свойства транзитивности по пути.

На рис. 1 приведены два Т-орграфа TG_1, TG_2 в двух вариантах их представления и их $MCS\{t_1G, \dots, t_4G\}$. Задача поиска $MCS\{t_1G, \dots, t_4G\}$ $[MCIS\{t_1G, \dots, t_4G\}]$ имеет самостоятельное значение и является одной из центральных задач графодинамики определения подграфа (индуцированного подграфа), который не меняется или "мало" меняется во времени.

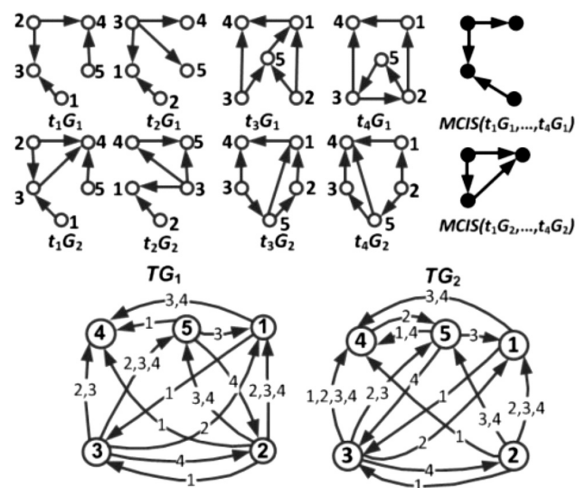


Рис. 1. Примеры двух видов представления TG_1, TG_2

3. Задачи определения сходства Т-Орграфов и надструктурный подход к решению задач

Выделим два шага перехода от П-подхода к Н-подходу с целью развития его применимости для анализа сходства Т-орграфов.

В качестве первого шага расширения сферы применения П-подхода [8] на класс Т-орграфов будем использовать две функции для вычисления расстояния между t_iG, t_jG :

$$D_1(t_iG, t_jG) = p(t_iG) + p(t_jG) - 2p(MCIS(t_iG, t_jG))$$

$$D_2(t_iG, t_jG) = p(t_iG) + q(t_iG) + p(t_jG) + q(t_jG) - 2(p(MCS(t_iG, t_jG)) + q(MCS(t_iG, t_jG)))$$

и функции для вычисления значений индексов сходства между t_iG, t_jG :

$$SI_1(t_iG, t_jG) = \frac{\left(p(MCIS(t_iG, t_jG)) \right)^2}{p(t_iG)p(t_jG)}$$

$$SI_2(t_iG, t_jG) = \frac{\left(p(MCS(t_iG, t_jG)) + q(MCS(t_iG, t_jG)) \right)^2}{\left(p(t_iG) + q(t_iG) \right) \left(p(t_jG) + q(t_jG) \right)}$$

Заметим, что D_1, D_2 являются метриками в отличие от SI_1, SI_2 .

Пусть $D = \{D_1, D_2\}, SI = \{SI_1, SI_2\}$. С целью всестороннего исследования сходства–различия пары Т–орграфов приведем формулировки 28 видов задач сходства–различия, сгруппированных по двум классам. Шесть видов задач из 28 впервые предложены автором в [7].

В первом классе 8 задач для определения динамики изменения значений расстояний и сходства структур одного TG и анализа динамики изменения на монотонность.

Задача 1.1. Задан

$$TG = \langle V^{(t)}, E^{(t)}, T \rangle, \quad T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо построить графики изменения значений

$$f_1 = D(t_iG, t_{i+1}G)$$

или

$$f_2 = SI(t_iG, t_{i+1}G),$$

где

$$i \in 1..(n-1).$$

Задача 1.2. Задан

$$TG = \langle V^{(t)}, E^{(t)}, T \rangle, \quad T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо построить графики изменения значений

$$f_3 = D(t_iG, t_jG) \quad \text{и} \quad f_4 = SI(t_iG, t_jG)$$

где $j \in 2..n$

Во второй класс входят 20 задач анализа динамики изменения расстояний или сходства двух Т–орграфов, которые имеют следующие постановки.

Задача 2.1. Заданы

$$TG_1 = \langle V_1^{(t)}, E_1^{(t)}, T \rangle,$$

$$TG_2 = \langle V_2^{(t)}, E_2^{(t)}, T \rangle,$$

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо построить графики изменения значений

$$f_5 = D(t_iG_1, t_iG_2) \quad \text{или} \quad f_6 = SI(t_iG_1, t_iG_2)$$

где $i \in 1..n$.

Задача 2.2. Заданы

$$TG_1 = \langle V_1^{(t)}, E_1^{(t)}, T \rangle,$$

$$TG_2 = \langle V_2^{(t)}, E_2^{(t)}, T \rangle,$$

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо построить графики изменения значений

$$f_7 = D(t_iG_1, t_jG_1) - D(t_iG_2, t_jG_2)$$

относительно TG_1 или

$$f_8 = SI(t_iG_1, t_jG_1) - SI(t_iG_2, t_jG_2)$$

относительно TG_1 ,

где $j \in 2..n$.

Задача 2.3. Заданы

$$TG_1 = \langle V_1^{(t)}, E_1^{(t)}, T \rangle,$$

$$TG_2 = \langle V_2^{(t)}, E_2^{(t)}, T \rangle,$$

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо построить графики изменения значений

$$f_9 = D(t_iG_1, t_{i+1}G_1) - D(t_iG_2, t_{i+1}G_2)$$

относительно TG_1 или

$$f_{10} = SI(t_iG_1, t_{i+1}G_1) - SI(t_iG_2, t_{i+1}G_2)$$

относительно TG_1 ,

где $i \in 1..(n-1)$.

Задача 2.4. Заданы

$$TG_1 = \langle V_1^{(t)}, E_1^{(t)}, T \rangle,$$

$$TG_2 = \langle V_2^{(t)}, E_2^{(t)}, T \rangle,$$

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо определить следующие значения интегральных расстояний или индексов сходства:

$$D_1(TG_1, TG_2) = D_1(MCIS(t_1G_1, \dots, t_nG_1), MCIS(t_1G_2, \dots, t_nG_2));$$

$$D_2(TG_1, TG_2) = D_2(MCS(t_1G_1, \dots, t_nG_1), MCS(t_1G_2, \dots, t_nG_2));$$

$$SI_1(TG_1, TG_2) = SI_1(MCIS(t_1G_1, \dots, t_nG_1), MCIS(t_1G_2, \dots, t_nG_2));$$

$$SI_2(TG_1, TG_2) = SI_2(MCS(t_1G_1, \dots, t_nG_1), MCS(t_1G_2, \dots, t_nG_2)).$$

Задача 2.5. Заданы

$$TG_1 = \langle V_1^{(t)}, E_1^{(t)}, T \rangle,$$

$$TG_2 = \langle V_2^{(t)}, E_2^{(t)}, T \rangle,$$

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Необходимо построить графики изменения значений $D_2 (SI_2)$ для графов попарных расстояний (индексов сходств) структур надграфов полупутей первого T-орграфа со вторым для каждой страты надграфов.

Второй шаг приводит к обобщению П-подхода с выделением надструктурного подхода и связан с построением системы надграфов для каждой структуры $t_i G$ каждого анализируемого T-орграфа.

4. Система методов анализа сходства T-Орграфов по H-подходу с использованием надграфов

Использование системы страт надграфов полупутей для T-орграфов приводит к более точному анализу сходства. Ниже приведены примеры использования надграфов полупутей, демонстрирующие получение более точных результатов, чем при использовании П-подхода для T-орграфов.

Пусть TM множество всех T-орграфов. Построим цветные надграфы полупутей (ЦНПП) $(cghp(t_j(G)), j \in 1..n)$ для TG по алгоритму, приведенному в [9], и представим их в ярусном виде. На одном ярусе расположены вершины, 1-1 отображающие полупути одинаковой длины и имеющие одинаковый цвет. Каждый $cghp(t_j(G))$ является k-долным орграфом с нумерацией долей от 0 до lhp_{max} , где lhp_{max} – длина максимального полупути в $t_j G$. Пусть $cghp_{0-k}(t_j(G))$ ЦНПП с длинами полупутей от 0 до $k+1$.

Выделим главное свойство ЦНПП [10] в новом расширенном варианте применения его для класса T-орграфов:

$$(\forall TG \in TM)(\forall t_j G \in TG)$$

$$\left[Aut(cghp_{0-k}(t_j G)) \approx Aut(t_j G) \right],$$

где $j \in 1..n, 0 \leq k \leq lhp_{max}$.

Построим для каждого

$$t_j G \in TG, \quad j \in 1..n,$$

систему страт ЦНПП вида

$$\langle cghp_{0-0}(t_j G), \dots, cghp_{0-k}(t_j G) \rangle,$$

где $0 \leq k \leq lhp_{max}$.

В результате темпоральный орграф TG будет охарактеризован следующим оригинальным набором систем страт

$$\langle cghp_{0-0}(t_1 G), \dots, cghp_{0-k_1}(t_1 G) \rangle,$$

$$\langle cghp_{0-0}(t_2 G), \dots, cghp_{0-k_2}(t_2 G) \rangle,$$

.....

$$\langle cghp_{0-0}(t_n G), \dots, cghp_{0-k_n}(t_n G) \rangle,$$

где $k_i = lhp_{max}$ максимальная длина полупути в $t_i G$. Этот набор позволяет более точно характеризовать TG на основе учета в явном виде полупутей и симметрии их расположения в каждой структуре

$$t_j G \in TG.$$

Введем новые характеристики, связанные с вычислением значения среднего расстояния и значения среднего сходства для

$$D_{av}(t_i G_l, t_j G_m) =$$

$$= \sum_{p=0}^{r1} \frac{D(cghp_{0-p}(t_i G_l), cghp(t_j G_m))}{r1+1};$$

$$SI_{av}(t_i G_l, t_j G_m) =$$

$$= \sum_{p=0}^{r1} \frac{SI(cghp_{0-p}(t_i G_l), cghp(t_j G_m))}{r1+1};$$

где $0 \leq r1 \leq \max(lhp_{max}(t_i G_l), lhp_{max}(t_j G_m))$.

При решении задач с использованием набора систем страт появляется новый метод, позволяющий получать в качестве результата не одну, а систему функций. Так, например, решая задачи 1.1 и 1.2 для определения значения D_1 при анализе TG_1 (рис. 1), получим по 4 функции, приведенные на рис. 2-3.

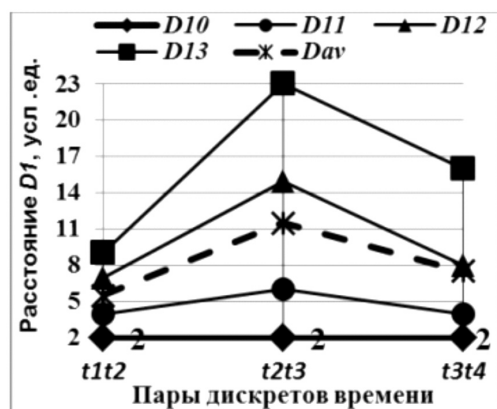


Рис. 2. Результаты решения задачи 1.1.

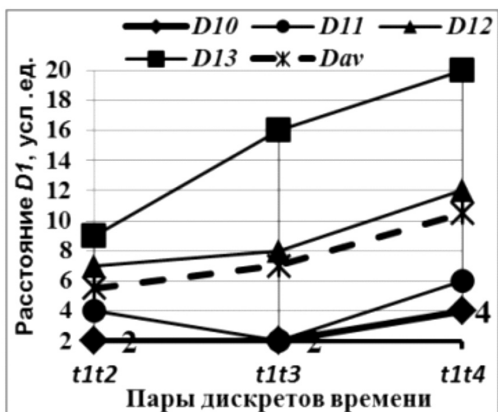


Рис. 3. Результаты решения задачи 1.2.

Результаты показывают, что функция изменения расстояния при решении задачи 1.1 по П-подходу монотонная, в то время как использование большей информации, включенной в надграфы полупутей, изменяет этот результат и приводит к более точному результату – не монотонности функции.

Вид результирующей функции $D1_{av}$ для задачи 1.2 повторяет и уточняет значения результата, полученного на основе П-подхода. Аналогичные результаты и выводы получены при вычислении значений SI_1 и решении задач 2.1, 2.2 при определении значения ΔD_1 для TG_1, TG_2 (рис. 1). Результаты решения задачи 2.3 также приводят к уточнению результата решения задачи при переходе от П-подхода к Н-подходу.

Из анализа результатов решения задач 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 следует, что использование набора систем страт {1}:

1) позволяет проводить сравнительный анализ П-подхода для исходных структур и надграфов, так как

$$\forall t_j G [cghp_{0-0}(t_j G) \approx t_j G];$$

2) приводит к более точным результатам решения задачи при переходе от одной страты к другой;

3) дает возможность анализировать влияние полупутей каждой длины на результат решения задачи; 4) дает возможность вводить новые более точные характеристики для исследования расстояния и сходства.

Для решения задачи 2.4 определим функции вычисления средних значений расстояний и сходства:

$$D1_{av}(TG_1, TG_2) = \frac{\sum_{p=0}^{r1} D_1(cghp_{0-p}(MCIS(t_1 G_1, \dots, t_n G_1)), cghp_{0-p}(MCIS(t_1 G_2, \dots, t_n G_2)))}{r1+1}$$

$$SI1_{av}(TG_1, TG_2) = \frac{\sum_{p=0}^{r1} SI_1(cghp_{0-p}(MCIS(t_1 G_1, \dots, t_n G_1)), cghp_{0-p}(MCIS(t_1 G_2, \dots, t_n G_2)))}{r1+1}$$

Аналогичные функции $D2_{av}, SI2_{av}$ определяются при замене в (4) и (5) $MCIS$ на MCS . Результаты решения задачи 2.4 при вычислении значений D_1, SI_1 для каждой страты и $D1_{av}, SI1_{av}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Результаты решения задачи 2.4.

	D10	D11	D12	D13	D1 _{av}	SI10	SI11	SI12	SI13	SI1 _{av}
MCIS	3	4	1	2	2,5	0,333	0,51	0,9	0,833	0,644

Результаты решения задач 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, 2.5 с учетом точного расположения полупутей в структурах Т-орграфов получены на основе метода [11], обобщенного для применения на класс Т-орграфов.

Объемные вычислительные эксперименты показали практическую применимость метода для Т-орграфов средних по сложности с числом вершин до 120. При учете приближенного расположения полупутей на основе метода из работы [10], обобщенного для применения на класс Т-орграфов, возможен анализ Т-орграфов средних по сложности с числом вершин до 400.

Выделим, что при решении задач с вычислением D_2 (SI_2) получаем более точные результаты в сравнении с вычислением D_1 (SI_1), однако, время вычислений может существенно возрасти. Как показали результаты вычислительных экспериментов достаточно использовать над-

графы полупутей высоты от 0 до 3, чтобы получать существенно более точные результаты, используя Н-подход в отличие от П-подхода.

На рис. 4 приведены графы попарных расстояний структур ghp_{0-4} для TG_1, TG_2 (рис. 1), их MCS и результаты вычисления D_2, SI_2 для задачи 2.5

При решении задач 2.5 потребовалась вычислительно сложная процедура декомпозиции tjG на подграфы с дальнейшей проверкой их изоморфного вложения во все tjG TG , что может ограничить практическую применимость метода для Т-орграфов высокого порядка.

Отметим, что даже для Т-орграфов малого порядка использование страт трансграфов приводит к более точным результатам анализа сходства.

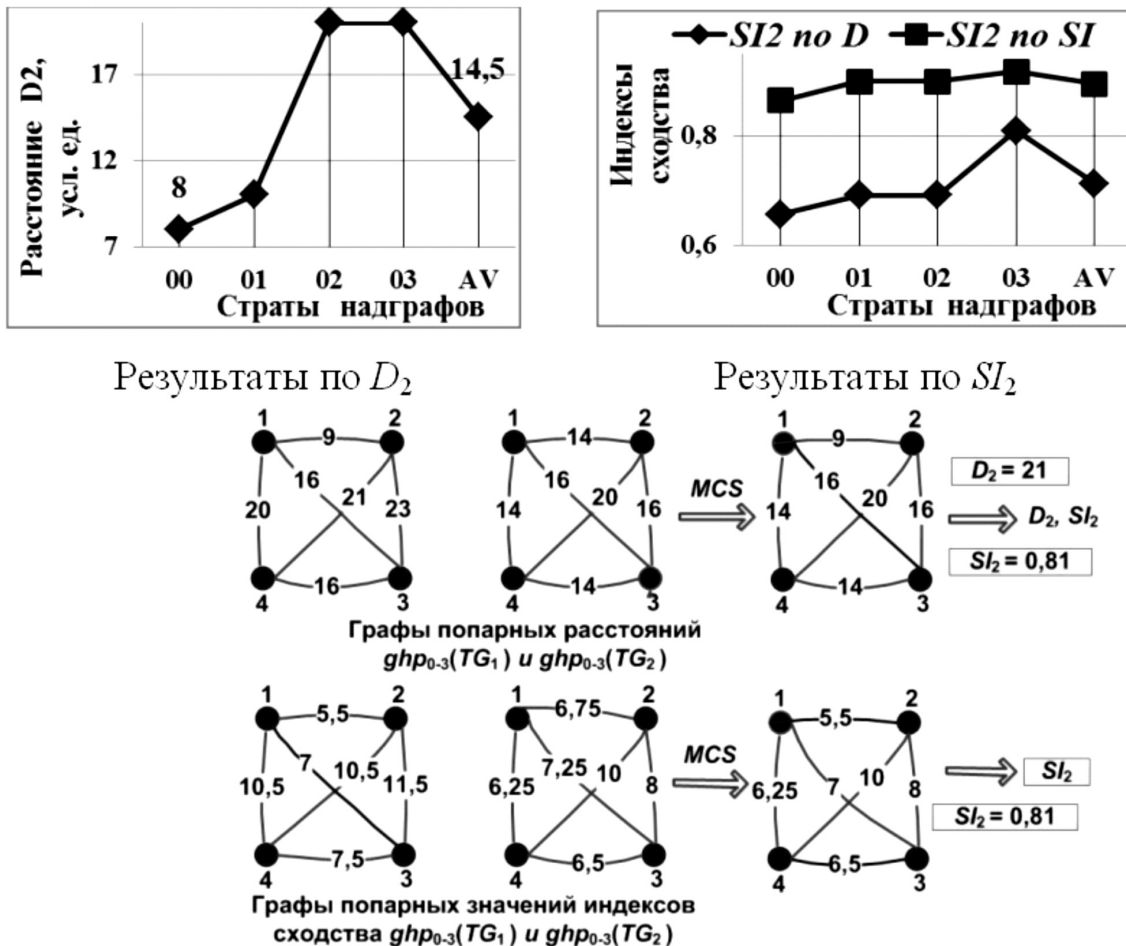


Рис. 4. Результаты решения задачи 2.5 при вычислении D_2 и SI_2 .

5. Метод повышения эффективности решения задач определения сходства

Главным недостатком П- и Н-подходов является NP-полнота задачи определения MCS и MCIS двух орграфов [12]. Однако для случая Т-ордеревьев этот недостаток снимается. Для повышения эффективности применения Н-подхода, хотя и с некоторой потерей точности, можно заменить экспоненциальный по вычислительной сложности алгоритм определения MCS (MCIS) для надграфов полупутей на эффективный (полиномиальный по вычислительной сложности) алгоритм определения макси-

мального общего фрагмента их инвариантов (b-моделей) [10].

В табл. 2 приведен пример инварианта $b_{1-3}(ghp(t_1 G_1))$ – матрицы достроек каждой вершины $ghp(t_1 G_1)$ до полупутей с длиной 1–3, включающих вершину как конечную и без учета типа полупути. В приведенном примере матрица достроек, так же, как и $ghp(t_1 G_1)$, точно характеризуют расположение полупутей в $t_1 G_1$. Орбиты $Aut(ghp(t_1 G_1))$ имеют вид

$$(v_1, v_5)(v_3, v_4)(v_2)(v_8, v_7)(v_6, v_{12})(v_{10})(v_{11}, v_{14})(v_9, v_{13}).$$

Таблица 2.

Таблица 2. Матрица достроек вершин до полупутей в $ghp(t_1 G_1)$.

Вершины $V(ghp(t_1 G_1))$	Полупути в $t_1 G_1$	Число достроек до полупутей длины:		
		1	2	3
v_1, v_5	v_1, v_5	2	5	11
v_3, v_4	v_3, v_4	4	9	18
v_2	v_2	4	12	11
v_{11}, v_{14}	$(v_1 v_3)(v_2 v_3)(v_2 v_4)$	2	5	12
v_6, v_{12}	$(v_5 v_4), (v_1 v_3)$	3	6	12
v_9, v_{13}	$(v_1 v_3)(v_2 v_3), (v_2 v_4)(v_5 v_4)$	3	6	16
v_8, v_7	$(v_2 v_4), (v_2 v_3)$	4	11	21
v_{10}	$(v_2 v_3)(v_2 v_4)$	4	8	20



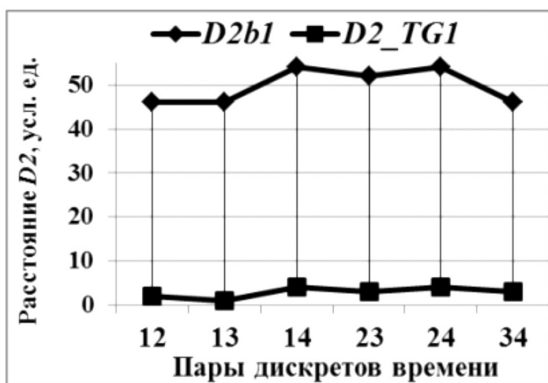


Рис. 5. Функции попарного сходства $t_1 G_1$ и их инвариантов.

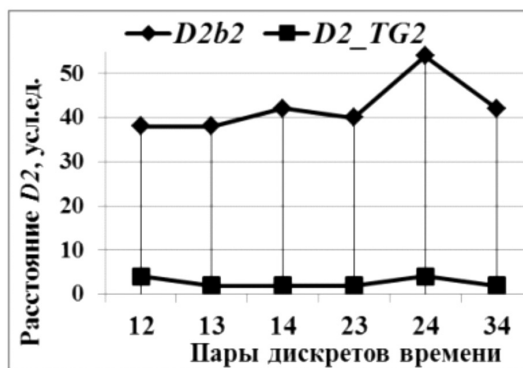


Рис. 6. Функции попарного сходства $t_j G_2$ и их инвариантов.

Как показали результаты объемных вычислительных экспериментов, достаточно использовать b -модели, в которых вершины достраиваются до полупутей с длиной 1–3 и учетом типов полупутей, чтобы получать точную характеристику расположения вершин в $ghp(tG)$, то есть расположения полупутей в tG при анализе: 1) орграфов tG с числом вершин до 7 (22 114); 2) ациклических tG с числом вершин до 9 (249 995 ациклических орграфов); 3) ордеревьев tG с числом вершин до 13 (633 383 ордеревья). На рис. 5 (рис. 6) приведены результаты вычисления попарного сходства tjG $TG1$ (tjG $TG2$) и попарного сходства их инвариантов $b1-3(tjG1)$ ($b1-3(tjG2)$) по D_2 . На рис. 5–6 результаты вычисления сходства инвариантов обозначены как D_2b .

Заметим, что переход к b -моделям почти не нарушил (небольшая разница только для значения D_2 для пары дискретов времени (t_1, t_2)) характер анализируемых функций.

Заключение

С целью всестороннего анализа сходства T -орграфов предложены 28 видов задач, входящих в класс центральных задач графодинамики. Предложена методология решения задач, включающая методы решения с использованием надграфов T -орграфов, обобщающих Π -подход, и методы, включающие построение и сравнение оригинальных инвариантов T -орграфов (матриц достроек вершин до полупутей заданных длин).

Использование инвариантов T -орграфов позволило повысить эффективность решения задач заменой труднорешаемых задач определения максимальных общих частей двух T -орграфов на полиномиальные по вычислительной сложности алгоритмы определения сходства инвариантов T -орграфов. Приведены примеры решения выделенных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А., Гусев Л.А., Петров С.В., Смирнова И.Н. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики) // *АиТ*. 1977. №7. С. 136–151.
2. Bramsen P.J. Doing Time: Inducing Temporal Graphs. Technical report, Massachusetts Institute of Technology. 2006. 51 p.
3. Jackson M.O. Social and Economic Networks. Princeton University Press, 2008. 647 p.
4. Haixun Wang, Charu C. Aggarwal. Managing and Mining Graph Data. Springer, 2010.
5. Kuhn F., Oshman R. Dynamic Networks: Models and Algorithms // *ACM SIGACT News*. 2011. № 42. – P. 82–96.
6. Кохов В.А., Кохов В.В. Методы анализа изменений глобальных и локальных свойств темпоральных орграфов. *Бизнес-информатика*. 2012. №03. – С. 42–51.
7. Кохов В.В. Задачи и методы анализа сходства темпоральных орграфов. Труды 14-ой национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ–2014. Том 3. Казань: Изд-во РИЦ "Школа". 2014. – С. 155–163.
8. Bunke H., Sharer K. A Graph Distance Metric Based on the Maximum Common Subgraph // *Pattern Recognition Letters*. Vol. 19. ? 1998. – No. 3–4. P. 255–259.
9. Кохов В.А., Кохов В.В. Система моделей для анализа сходства орграфов с учетом расположения полупутей. Труды 13-ой конференции по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ–2012. В 3-х т. Том 3. М.: Физматлит, 2012. – С. 9–16.
10. Кохов В.А. Два подхода к определению сходства орграфов // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2012, №3, с. 76–95.
11. Нечепуренко М.И., Попков В.К., Кохов В.А. и др. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. Новосибирск: Наука, 1990. 515 с.
12. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982, – 416 с.

© В.В. Кохов, (viktor-kokhov@ya.ru), Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики».



Национальный исследовательский университет - Московский Энергетический институт