

ОСОБЕННОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

PECULIARITIES OF STATIONARY ELECTRIC FIELDS IN BOUNDED ANISOTROPIC SEMICONDUCTORS

V. Filippov
V. Ziyautdinov
M. Smirnov
K. Bogonosov

Summary. In modern functional electronics and microelectronics, materials with a pronounced character of the anisotropy of electrophysical properties are increasingly being used. Anisotropy properties are associated not only with the nature of their crystal structure, but also with the miniaturization of structural elements in semiconductor systems. The active practical application of these semiconductors in functional electronics requires a qualitative mathematical description of the kinetic phenomena of electron transfer in the bulk of the crystal and at its contacts with the metal. In this paper, a mathematical and computer calculation of electric fields of direct currents in semiconductors with a pronounced anisotropy of electrical conductivity is carried out, followed by a theoretical analysis of the obtained distributions of electric fields. The material of the article will be of interest to everyone who is involved in both modeling the physical properties of anisotropic semiconductor materials and directly studying such materials in an experiment.

Keywords: mathematical model, anisotropic material, electric field distribution, computer simulation, semiconductor, functional electronics.

Филлипов Владимир Владимирович

Д.ф.-м.н., доцент, Липецкий казачий институт технологии и управления (филиал) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет технологии и управления имени К.Г. Разумовского (ПКУ)»; Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк
wwfilippow@mail.ru

Зияутдинов Владимир Сергеевич

К.п.н., доцент, Липецкий казачий институт технологии и управления (филиал) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет технологии и управления имени К.Г. Разумовского (ПКУ)», г. Липецк
zevslipetsk@yandex.ru

Смирнов Михаил Юрьевич

К.ф.-м.н., доцент, Липецкий казачий институт технологии и управления (филиал) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет технологии и управления имени К.Г. Разумовского (ПКУ)», г. Липецк
m_u_smirnov@mail.ru

Богоносков Константин Александрович

К.т.н., доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет технологии и управления имени К.Г. Разумовского (ПКУ)», г. Москва
m_u_smirnov@mail.ru

Аннотация. В современной функциональной электронике и микроэлектронике все чаще получают применение материалы с ярко выраженным характером анизотропии электрофизических свойств. Свойства анизотропии связаны не только с характером их кристаллического строения, но и с миниатюризацией структурных элементов в полупроводниковых системах. Активное практическое применение данных полупроводников в функциональной электронике требует качественного математического описания кинетических явлений электронного переноса в объеме кристалла и на контактах его с металлом. В работе произведен математический и компьютерный расчет электрических полей постоянных токов в полупроводниках с выраженной анизотропией удельной электропроводности с последующим теоретическим анализом полученных распределений электрических полей. Материал статьи будет интересен всем, кто занимается как моделированием физических свойств анизотропных полупроводниковых материалов, так и непосредственно исследующим такие материалы в эксперименте.

Ключевые слова: математическая модель, анизотропный материал, распределение электрического поля, компьютерное моделирование, полупроводник, функциональная электроника.

Введение

Постоянно развивающаяся электроника идет не только по пути миниатюризации, но и находит все более широкий спектр материалов с новыми функциональными свойствами. На данный момент, кроме всем известных полупроводников, таких как кремний, германий, арсенид галлия, практически не проявляющих анизотропию электрофизических свойств, все более находят применение материалы с ярко выраженной анизотропией кинетических параметров [1–3]. Полупроводниковые анизотропные кристаллы сейчас используются как функциональные подложки, слоистые структуры оптоэлектроники, матрицы для магнитных элементов [4–6]. В частности, многие перспективные кристаллы A^2B^5 ($CdSb$, ZnP_2 , CdP_2 , $ZnAs_2$, Cd_3As_2 и др.) обладают ярко выраженной анизотропией электрических, магнитных и оптических свойств. На материалах $AB^{III}_2X^{VI}_4$ ($A - Mn, Fe, Ni, Co$; $B^{III} - Ga, In$; $X^{VI} - S, Se, Te$) созданы управляемые магнитным полем лазеры, модуляторы света, фотодетекторы, и др. приборы. При расчетах основных кинетических параметров полупроводников и их непосредственном последующем внедрении в микро- и нанoeлектронику необходимо учитывать анизотропию применяемых материалов. Для решения важной практической задачи нахождения удельной электропроводности и её температурной характеристики необходимо решить электродинамическую краевую задачу.

В данной работе реализуются методы расчета электрических полей в полупроводниковых кристаллах при практических измерениях токов и напряжений, при этом особое внимание уделено методу комплексных рядов Фурье. Приводимые выражения могут быть применены как для моделирования поведения носителей тока в анизотропных полупроводниковых системах, так и для выполнения теоретического конструирования на их основе различных приборов и датчиков с заданными свойствами и параметрами. Приведены оценки точности рассматриваемых методов расчета.

Теоретическая модель

В представляемых далее расчетах рассмотрим аналитический метод определения распределения потенциала электрического поля постоянного тока в анизотропном ограниченном образце. В наиболее общем варианте, анализируемом ниже, монокристалл вырезан таким образом, что главные направления тензора удельной электропроводности составляют некоторый угол Θ с гранями образца, токовые омические контакты размещены на противоположных боковых гранях и образец можно считать тонким (рис. 1).

В приводимой далее плоской задаче тензор удельной электропроводности приобретает вид:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а его компоненты определяются согласно выражениям [7]:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \cos^2 \Theta + \sigma_2 \sin^2 \Theta, \tag{2}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_1 \sin^2 \Theta + \sigma_2 \cos^2 \Theta, \tag{3}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\Theta. \tag{4}$$

В приводимых выше формулах значения σ_1 и σ_2 — главные компоненты тензора удельной электропроводности исследуемого полупроводникового кристалла.

В дальнейших расчетах рассматривается практически важный случай, когда толщина образца d значительно меньше его длины a и ширины b , а токовые омические контакты 1, 2 изготовлены на периметре полупроводника по всей его толщине, как показано на рис. 1. Таким образом, получаем двумерную краевую задачу электродинамики. Кроме того, принимаем условие, что ширина контактов $2c$ удовлетворяет условию ($2c \ll a$, и $2c \ll b$), т.е. контакты являются практически точечными. При выбранных условиях особенности распределения потенциала и плотности тока в образце будут определяться только параметрами анизотропии удельной электропроводности монокристалла.

При пропускании через однородный образец постоянного тока I плотность тока \mathbf{j} связана с электрическим потенциалом $\varphi(x, y)$ в области полупроводника следующим равенством [8]:

$$\mathbf{j} = - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x - \left(\sigma_{yx} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y. \tag{5}$$

В случае установившегося процесса протекания постоянного тока при отсутствии источников и стоков электрических зарядов справедливо равенство:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{6}$$

Отсюда, на основании (5), следует уравнение для потенциала электрического поля в однородном кристаллическом образце:

$$\sigma_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \tag{7}$$

Граничные условия для электрического потенциала следуют из требования, чтобы составляющая плотности тока нормальная к поверхности образца была равна

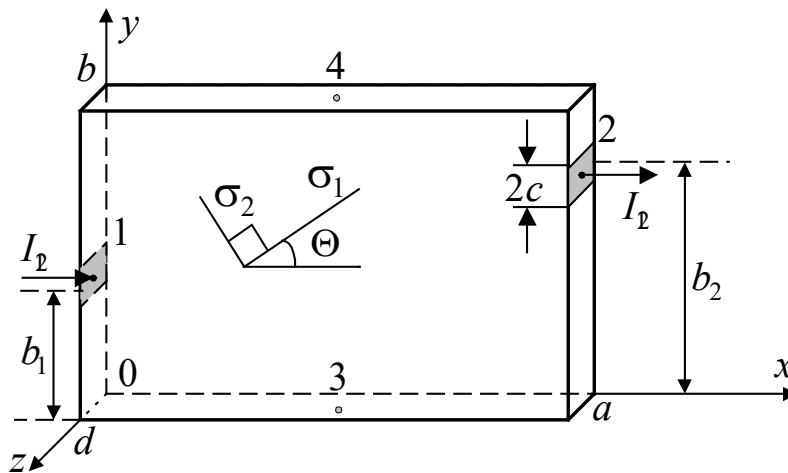


Рис. 1. Модель тонкого анизотропного полупроводника и измерительных контактов на прямоугольном образце, ориентированном под произвольным углом к главным направлениям тензора электропроводности.

нулю всюду, кроме точек под токовыми электродами [8, 9], притом под токовыми электродами она постоянна:

$$\left(\sigma_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0,a} = \begin{cases} 0, y \in [0; b_{1,2} - c] \cup (b_{1,2} + c; b]; \\ -\frac{I_2}{2cd}, y \in [b_{1,2} - c; b_{1,2} + c]; \end{cases} \quad (8)$$

$$\left(\sigma_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sigma_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{y=0,b} = 0. \quad (9)$$

Краевая задача Неймана с наклонной производной (7) — (9) составляет известную проблему, решение которой в теории потенциала представляет известные теоретические сложности [10, 11]. Нами предлагается метод решения данной краевой задачи с использованием аппарата комплексных рядов Фурье [12].

Несложно показать, что с помощью замены переменных:

$$t = (\gamma_2 - i\gamma_1)x + iy, \quad \bar{t} = -(\gamma_2 + i\gamma_1)x + iy; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_{xy} / \sigma_{xx}, \quad \gamma_2 = \sigma_0 / \sigma_{xx}, \\ \sigma_0 &= \sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \end{aligned} \quad (12)$$

дифференциальное уравнение (7) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t \cdot \partial \bar{t}} = 0. \quad (13)$$

В соответствии с этим комплексный потенциал $\varphi^*(x, y)$ представим в виде ряда Фурье:

$$\varphi^*(x, y) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} X_n(\beta_n x \cdot (\gamma_2 - i\gamma_1)) \cdot \exp(i\beta_n y);$$

$$\beta_n = \frac{\pi n}{b}, \quad (14)$$

в котором всякий член ряда $X_n(x)$ на основании (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \gamma_3 \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + 2i\gamma_4 \beta_n \frac{\partial X_n}{\partial x} - \beta_n^2 X_n(x) &= 0; \\ \gamma_3 &= \sigma_{xx} / \sigma_{yy}, \quad \gamma_4 = \sigma_{xy} / \sigma_{yy} \end{aligned} \quad (15)$$

и граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial X_n}{\partial x} + \gamma_1 i \beta_n X_n \right) \Big|_{x=0,a} = \frac{2I_2 \eta_n \sin(\beta_n c)}{\sigma_{xx} db \beta_n c} \cos(\beta_n b_{1,2}); \quad (16)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad \eta_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0; \\ 1/2, & n = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Пропуская решение уравнения (15) с граничными условиями (16), введу его громоздкости, запишем итоговое выражение для комплексного потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y) &= \frac{2I_2}{bd\sigma_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \eta_n \frac{\sin(\beta_n c)}{\beta_n c} \frac{\exp(i\beta_n y)}{\delta_n \operatorname{sh}(\beta_n a)} \times \right. \\ &\times [\operatorname{ch}(\delta_n(x-a)) \cdot \cos(\beta_n b_1) \cdot \exp(-i\beta_n \gamma_1 x) - \\ &\left. - \operatorname{ch}(\delta_n x) \cdot \cos(\beta_n b_2) \cdot \exp(i\beta_n \gamma_1(a-x))] \right\}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_{xy} / \sigma_{xx}, \quad \gamma_2 = \sigma_0 / \sigma_{xx}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \\ \beta_n &= \pi n / b, \quad \delta_n = \beta_n \gamma_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Выделяя действительную часть из комплексного потенциала (18), получаем выражение для потенциала электрического поля в прямоугольном образце:

$$\varphi(x,y) = \frac{I_{12}(\sigma_{xy}y - \sigma_{yy}x)}{bd\sigma_0^2} - \frac{2I_{12}}{bd\sigma_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\beta_n c)}{\beta_n^2 c} \frac{1}{\text{sh}(\gamma_2 \beta_n a)} [\text{ch}(\gamma_2 \beta_n x) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 (x - a))) \cdot \cos(\beta_n b_2) - \text{ch}(\gamma_2 \beta_n (x - a)) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 x)) \cdot \cos(\beta_n b_1)] \right\}. \quad (20)$$

Как правило, токовые контакты располагают на оси симметрии образца ($b_1=b_2=b/2$). В данном случае выражение для распределения потенциала несколько упрощается:

$$\varphi(x,y) = \frac{I_{12}(\sigma_{xy}y - \sigma_{yy}x)}{bd\sigma_0^2} - \frac{2I_{12}}{bd\sigma_0} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\sin(\beta_n c)}{\beta_n^2 c} \frac{(-1)^{n/2}}{\text{sh}(\gamma_2 \beta_n a)} \times [\text{ch}(\gamma_2 \beta_n x) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 (x - a))) - \text{ch}(\gamma_2 \beta_n (x - a)) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 x))] \right\}. \quad (21)$$

Для получения более полной информации о распределении стационарных полей в анизотропных ограниченных полупроводниковых кристаллах найдем выражения для компонент плотности тока. Согласно вышеуказанным выражениям (5) и (21) находим проекции вектора плотности тока на координатные оси x и y для случая симметричного положения контактов $b_1=b_2=b/2$ (рис. 1):

$$j_x(x,y) = \frac{I}{bd} + \frac{2I_{12}}{bd} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\sin(\beta_n c)}{\beta_n c} \frac{(-1)^{n/2}}{\text{sh}(\gamma_2 \beta_n a)} \times [\text{sh}(\gamma_2 \beta_n x) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 (x - a))) + \text{sh}(\gamma_2 \beta_n (x - a)) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 x))] \right\}, \quad (22)$$

$$j_y(x,y) = \frac{2I_{12}\gamma_2}{bd} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\sin(\beta_n c)}{\beta_n c} \frac{(-1)^{n/2}}{\text{sh}(\gamma_2 \beta_n a)} \times [\text{ch}(\gamma_2 \beta_n x) \cdot \sin(\beta_n (y - \gamma_1 (x - a))) - \text{ch}(\gamma_2 \beta_n (x - a)) \cdot \sin(\beta_n (y - \gamma_1 x))] \right\} - \frac{2I_{12}\gamma_1}{bd} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\sin(\beta_n c)}{\beta_n c} \frac{(-1)^{n/2}}{\text{sh}(\gamma_2 \beta_n a)} \times [\text{sh}(\gamma_2 \beta_n x) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 (x - a))) + \text{sh}(\gamma_2 \beta_n (x - a)) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 x))] \right\}.$$

$$+ \text{sh}(\gamma_2 \beta_n (x - a)) \cdot \cos(\beta_n (y - \gamma_1 x))] \}. \quad (23)$$

Полученные выражения для плотности тока определяют его вихревой характер:

$$[\nabla, \mathbf{E}] = \text{rot } \mathbf{E} = 0; \\ [\nabla, \mathbf{j}] = \text{rot } \mathbf{j} = \mathbf{e}_z \cdot \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] \neq 0. \quad (24)$$

Выражения (24) показывают, что в анизотропном образце также присутствует вихревая составляющая плотности постоянного электрического тока \mathbf{j} , при этом электрическое поле \mathbf{E} остается потенциальным, безвихревым. Эта составляющая нами ранее была определена с помощью вихревых токов анизотропии (ВТА). Согласно проведенным расчетам, ВТА при постоянных токах для однородных кристаллов существуют только в анизотропных материалах, т.е. при $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Выявленный факт разрешает при моделировании линий тока электрического поля представить ВТА как добавочную составляющую вектора плотности тока, возникающую в анизотропном полупроводнике, по сравнению с изотропным, как это, например, выполнено в работе [13].

Для более подробного практического рассмотрения теории распределения потенциала представим выражения для расчета потенциала в анизотропных полупроводниках более сложной полигональной формы. Данный вопрос ранее анализировался в научных работах [14, 15], в которых также указаны особенности проведения вычислений электрического потенциала вблизи границ анизотропного образца. Граничные условия к общему дифференциальному уравнению (7) формулируются из условий, что нормальная составляющая плотности тока на свободных гранях образца во всех точках равна нулю, а токовые контакты 1,2 принимаются эквипотенциальными. Соответственно, стационарное распределение потенциала электрического тока в анизотропном полупроводнике описывается краевой задачей эллиптического типа со смешанными граничными условиями, включающими условие Дирихле и условие Неймана.

Основная идея применяемого метода конформных отображений заключается в том, что область определения потенциала сложной формы преобразуется к более простому виду, для которого электродинамическая задача может быть относительно просто решена при указанных выше более сложных граничных условиях.

Рассмотренная задача с применением конформного отображения наиболее эффективно решается для двумерного случая, когда приложение теоремы Кристоффеля-Шварца позволяет получить функцию, реа-

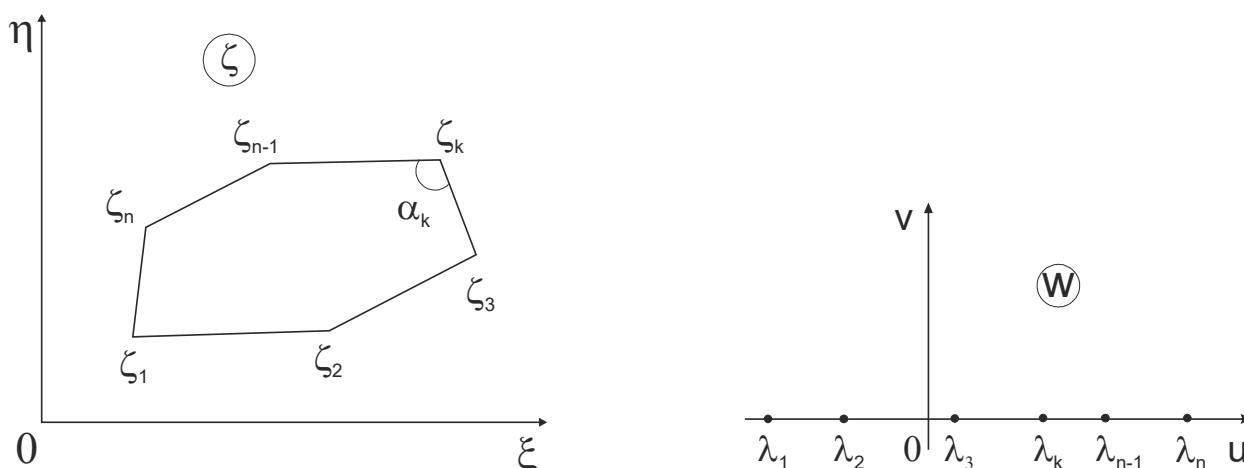


Рис. 2. Конформное отображение комплексной полуплоскости на внутреннюю область многоугольника.

лизирующую отображение верхней полуплоскости на избранную область, ограниченную многоугольником [12]. Поскольку уравнение Лапласа, краевые условия Дирихле и Неймана инвариантны относительно конформных отображений, соответственно, рационально привести дифференциальное уравнение (7) к каноническому виду, используя простое аффинное преобразование:

$$\xi = x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} y, \quad \eta = \frac{\sigma_0}{\sigma_{yy}} y, \quad \sigma_0 = \sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2}. \quad (25)$$

В приводимых координатах рассматриваемое уравнение (7) преобразуется в более простое уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0, \quad (26)$$

а область расчета электрического поля — в некоторый новый многоугольник, параметры которого в введённой плоскости (ξ, η) можно вычислить, зная соответствующие начальные параметры многоугольника в стандартной плоскости (x, y) . Условие “наклонной” производной при преобразовании (25) преобразуется в стандартное граничное условие Неймана.

Для окончательного решения приводимой задачи необходимо применить теорему Кристоффеля-Шварца на комплексной плоскости [9, 12], согласно которой если на действительной оси задан ряд чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$) то преобразование

$$\zeta = C_1 \int_0^w (w - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} (w - \lambda_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (w - \lambda_n)^{\alpha_n - 1} dw + C_2 \quad (27)$$

отображает верхнюю часть $[Im(w) > 0]$ плоскости w на область многоугольника в плоскости ζ , не содержащую внутри себя точки $\zeta = \infty$, где C_1 и C_2 — комплексные постоянные, выбираемые произвольно.

Приводимое преобразование переводит действительную ось плоскости w в ломаную линию на плоскости ζ , отвечающую границам произвольного многоугольника (рис. 2). Точкам действительной оси $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответствуют вершины отображенного многоугольника $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, а действительным числам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы при этих вершинах.

Далее применяя конформное преобразование, отображающее многоугольник с двумя потенциальными контактами на плоскости ζ на верхнюю полуплоскость $Im(w) > 0$ комплексной плоскости $w = u + iv$, переходим к вытекающей краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{v=0} = 0, \quad u \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, +\infty), \quad (29)$$

$$\varphi \Big|_{v=0} = \begin{cases} V_1, u \in (a_1, b_1), \\ V_2, u \in (a_2, b_2), \end{cases} \quad (30)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — образы краев токовых контактов, принадлежащие действительной оси $v=0$.

Решение полученной задачи (28)-(30) реализуем, применяя теорему Келдыша-Седова [15, 16]. В результате получаем решение в виде интеграла:

$$\varphi(w) = \operatorname{Re} \int_0^w \frac{A}{\sqrt{(w-a_1)(w-b_1)(w-a_2)(w-b_2)}} dw + B. \quad (31)$$

A, B — произвольные действительные постоянные.

Функция, определяющая конформное отображение верхней полуплоскости комплексной плоскости $[Im(w) > 0]$

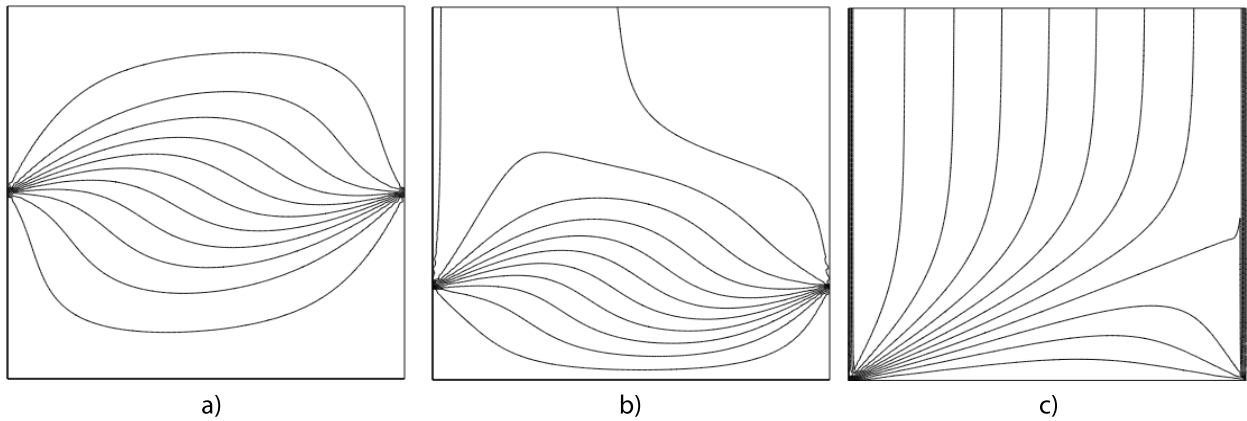


Рис. 3. Распределение токовых линий в случае $\Theta = \pi/8$ при различном положении токовых контактов: а) $b_1 = b_2 = b/2$, б) $b_1 = b_2 = b/4$, в) $b_1 = b_2 = 0$.

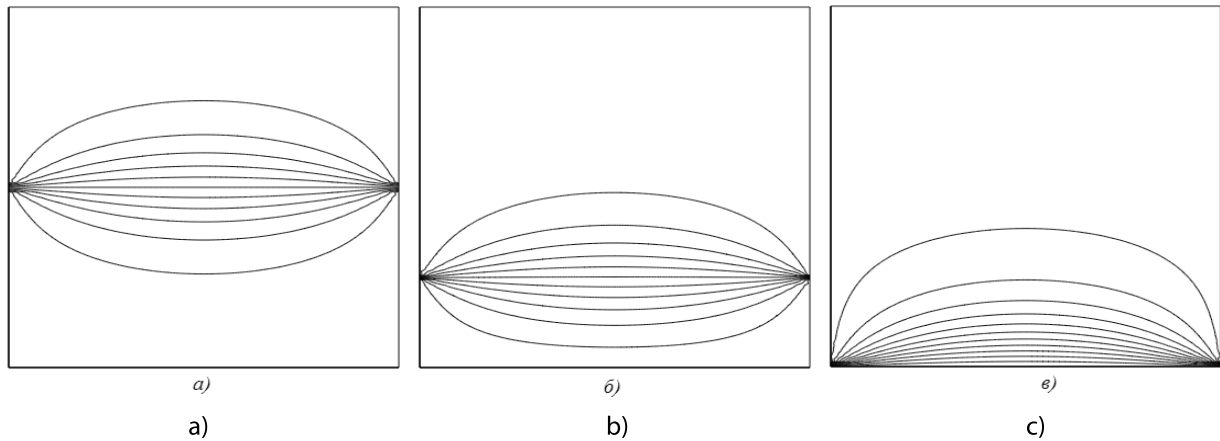


Рис. 4. Распределение токовых линий в случае $\Theta = 0$ при различном положении токовых контактов: а) $b_1 = b_2 = b/2$, б) $b_1 = b_2 = b/4$, в) $b_1 = b_2 = 0$.

на область многоугольника, описывается указанным выше интегралом Кристоффеля-Шварца (27). В работах [14, 15] показано применение рассмотренного здесь метода для определения электрического потенциала в образцах в конфигурации параллелограмма и треугольника.

Компьютерное моделирование и анализ решения

Недостатки метода основанного на применении конформных отображений связаны с необходимостью применения численных методов расчетов, сложностью их физической интерпретации и последующей обработки результатов расчета для представления распределения вектора плотности тока и его потока в анизотропной области. Довольно проблематично применение результатов численных расчетов к приложениям метрики полупроводников.

На рисунках 3, 4, представленных ниже, приведены результаты расчета распределений потока плотности тока (12 токовых линий) в анизотропных полупроводниках ($\sigma_1 = 10\sigma_2$) при следующих параметрах образца: $a=b, d=0.1b$, токовые контакты считаем точечными ($2c=0.02b$).

В основе теории описания расчета электрических полей успешно используется метод комплексных рядов Фурье. Однако, его применение накладывает ряд ограничений на полученное решение и области его применения к пластинам анизотропных полупроводников. Необходимо указать, что граничное условие на верхней и нижних границах полупроводника (рис. 1) заменяется использованием комплексных рядов, что вызывает ограничение точности получаемого решения для электрического потенциала при значительных па-

раметрах анизотропии σ_1/σ_2 и углах поворота Θ кристаллографических осей относительно граней образца.

Как показывают практические расчеты, величина погрешности вычислений плотности электрического тока и потенциала на основе применения комплексных рядов Фурье наименьшая (1–3%) в случае симметричного положения токовых электродов при $b_1 = b_2 = b/2$. При этом, получаемая погрешность не превышает 5%, если высота положения центров токовых контактов удовлетворяет условию $0.25b \leq b_i \leq 0.75b$, $i=1,2$. При положении токовых контактов на одной общей грани погрешность

расчета тока и потенциала по формуле (20) максимальна и может достигать 50% (в зависимости от угла поворота кристаллографических осей относительно граней образца), поэтому при таком расположении контактов следует выбирать метод конформных отображений. В случае если образец вырезан вдоль кристаллографических осей ($\Theta=0$) [17,18] выражение для расчета потенциала позволяет производить расчет с погрешностью, не превышающей 3% при произвольном положении токовых контактов на гранях образца. Полученное решение для потенциала в явном виде (20) весьма удобно для применения к проблемам метрики анизотропных материалов электроники, например [13, 19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Маренкин С.Ф., Трухан В.М. Фосфиды, арсениды цинка и кадмия. — Минск: Вараскин, 2010.
2. Анизотропия проводимости в легированных монокристаллах Bi₂Te₃ / Н.А. Абдуллаев [и др.] // Физика и техника полупроводников. — 2009. — Т. 43, № 2. — С. 156–162.
3. Gate Tunable Supercurrent in Josephson Junctions Based on Bi₂Te₃ Topological Insulator Thin Films / Wei-Xiong Wu [et al] // Chinese Physics Letters. — 2021. — V. 38, № 3. — P. 037402.
4. Намагниченность композита Cd₃As₂ + (30%) MnAs при высоком давлении / Сайпулаева Л.А. [и др.] // Журнал технической физики — 2021. — Т. 91, № 11. — С. 1674–1677.
5. Магнитная анизотропия игольчатых монокристаллических включений MnSb в матрице InSb / Дмитриев А.И. [и др.] // Письма в журнал технической физики. — 2021. — Т. 47, № 10. — С. 46–49.
6. Синтез и исследование электрических свойств диарсенида трикадмия с наногранулами MnAs / Сайпулаева Л.А. [и др.] // Журнал технической физики. — 2020. — Т. 90, № 7. — С. 1128–1131.
7. Nye J.F. Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices. — New York, Oxford. — 1984.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2005.
9. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics (4th ed.). — Boston, Mas.: Pearson. — 2013.
10. Назарова К.Ж., Турметов Б.Х., Усманов К.И. Об одной нелокальной краевой задаче с наклонной производной // Журнал Средневолжского математического общества. — 2020. — Т. 22, № 1. — С. 81–93.
11. Gonzalez de la Cruz G., Gurevich Y.G., Kucherenko V.V., Ramirez de Arellano E. On the magnetoresistance of finite semiconductors // Europhysics Letters . — 2001. — V. 53, № 4. — P. 539.
12. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. — Dover Publications, Inc., New York. — 2001.
13. Filippov V.V., Bormontov E.N. Features of the electric-field distribution in anisotropic semiconductor wafers in a transverse magnetic field // Semiconductors. — 2013. — V. 47, № 7. — P. 884.
14. Бормонтов Е.Н., Хухрянский □.□., Бессарабов □.□. Двумерное распределение потенциала в анизотропных пластинах полигональной формы // Конденсированные среды и межфазные границы. — 1999. — Т. 1, № 4. — С. 315–320.
15. Khukhryanskij M. Yu. Modelling of the potential distribution in flat anisotropic semiconductor samples // Semiconductors. — 1996. — V. 30, № 9. — P. 814–816.
16. Mathews J.H., Howell R.W. Complex Analysis for Mathematics and Engineering. Jones and Bartlett Publishers. — Canada, Toronto. — 1997.
17. Phase transformations in II–V semiconductors under high pressure / Mollaev A.Y. [et al] // Semiconductors. — 2009. — V. 43, № 6. — P. 701.
18. Thermal Conductivity of Tetragonal Cadmium Diphosphide Crystals / Popov P.A. [et al] // Inorganic Materials. — 2018. — V. 54, № 3. — P. 237.
19. Filippov V.V., Mitsuk S.V. Modelling Magnetoresistance Effect in Limited Anisotropic Semiconductors // Chinese Physics Letters. — 2017. V. 34, № 7. — P. 077201.