НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Боряев Александр Александрович
К.т.н., доцент, Санкт-Петербургский Политехнический Университет им. Петра Великого; Санкт-Петербургский Государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург
sasa1953@yandex.ru
Чжу Юйцин
Аспирант, Санкт-Петербургский Политехнический Университет им. Петра Великого, г. Санкт-Петербург

Аннотация. представлена формализованная постановка задачи идентификации экспериментальных моделей объектов управления. Рассмотрен выбор структуры модели и выбор информативных переменных на основе методов корреляционного анализа. На основе методов ранговой корреляции предложен способ выделения существенных переменных математической модели. Использование представленных методов решения поставленных задач методами корреляционного анализа позволят обеспечить идентичность математической модели реальному объекту и создать эффективную систему его управления.

Ключевые слова: идентификация моделей; выбор структуры моделей; выбор информативных переменных.

SOME ISSUES OF IDENTIFICATION OF EXPERIMENTAL MODELS OF OBJECTS OF CONTROL

A. Boryaev
Zhu Yuqing

Summary. a formalized formulation of the problem of identification of experimental models of control objects is presented. The choice of the model structure and the choice of informative variables based on the methods of correlation analysis are considered. On the basis of methods of rank correlation the method of allocation of essential variables of mathematical model is offered. The use of the presented methods of solving problems by methods of correlation analysis will ensure the identity of the mathematical model of the real object and create an effective system of its management.

Keywords: identification of models; choice of model structure; choice of informative variables.

Введение

Математические модели широко применяются при анализе режимов функционирования технологических объектов с целью создания систем управления и отыскания наиболее благоприятных с экономической точки зрения и безопасных режимов.

В качестве математической модели могут использоваться алгебраические, дифференциальные и интегральные уравнения, импульсные переходные функции, частотные характеристики, оператор условного математического ожидания $m_y = f(x_1, \ldots, x_n)$, условная плотность распределения вероятностей $\varphi(y/X)$.

Зачастую в практике приходится рассматривать экспериментальные модели, полученные по наблюдениям за функционированием технологического объекта либо в режиме нормальной эксплуатации, либо в ходе специально проведенного эксперимента.

Постановка задачи идентификации

Задачу определения характеристик объекта будем рассматривать как задачу, сопряженную по отношению к задаче управления объектом. Саму задачу идентификации сформулируем как задачу определения оптимальной в заданном смысле оценки оператора объекта по данным «вход-выход», полученным в условиях функционирования объекта. Фиксируя реакцию объекта на различные контролируемые входные воздействия, можно определить те из них, которые обеспечивают желаемое поведение объекта, и тем самым идентифицировать объект [1–5].

Рассмотрим постановку задачи идентификации, понимая под ней определение математической модели объекта. Задачу нахождения выходной переменной y объекта с известной характеристикой A_t по входной переменной x принято называть прямой. Обратная задача заключается в определении характеристики (оператора) A_t объекта по заданному входному-выходному сигналам. Эту задачу и будем называть задачей идентификации.

В практике идентификации широко применяются корреляционные и регрессионные методы [6,7]. Идентификация с помощью методов корреляционных функций основана на известном для линейных объектов соотношении

$$R_{y,x}(\Theta) = \int_0^\infty g(\tau) R_{x,x}(\Theta - \tau) d\tau \tag{1}$$

в котором $R_{y,x}(\Theta)$ — взаимная корреляционная функция между величиной выходного сигнала $y(t)$ в любой момент времени t и величиной входного сигнала $x(t)$ в момент $t-\Theta$; $R_{x,x}$ — автокорреляционная функция входного сигнала; $g(\tau)$ — импульсная реакция системы.

Структура модели и выбор информативных переменных на основе корреляционного анализа

В настоящее время не существует однозначных рекомендаций по выбору наилучшей структуры модели. Из структуры объекта можно извлечь определенную априорную информацию и, в частности, вид модели. Наиболее употребительными математическими моделями являются: алгебраические и трансцендентные уравнения, интегральные и дифференциальные (обыкновенные и в частных производных) уравнения, уравнения в конечных разностях [8]. Например, модель в форме трансцендентного уравнения

$$y = a_0 e^{a_1 x_1 + a_2 x_2} \quad (2)$$

ее можно назвать также моделью, нелинейной по коэффициентам) может быть приведена к линейной форме

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 . \quad (3)$$

Могут рассматриваться так же внутренне нелинейные модели, например

$$y = a_0 + a_1 e^{-a_2 x}, y = a_0 + a_1 x + a_2^x . \quad (4)$$

Распространенной математической моделью, применение которой часто оказывается полезным на практике, является мультипликативная модель

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} .. \quad (5)$$

Для описания установившихся процессов и при наличии одного распределенного параметра или неустановившихся процессов с сосредоточенными параметрами используются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y =$$
$$= b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + b_{n-1} \frac{dx}{dt} + b_n x + c \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения в частных производных используются при описании установившихся или неустановившихся процессов с распределенными параметрами.

Поскольку невозможно однозначно на основе формальных методов выбрать наилучшую модель, уместно остановиться на сравнении нескольких моделей.

Рассмотрим критерий Уилкса для сравнения нескольких линейных или нелинейных по коэффициентам уравнений регрессии. Пусть по n наборам экспериментальных данных построено p-уравнений регрессии $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_p$. Регрессия $\hat{y}^*$ является линейной комбинацией этих уравнений

$$\hat{y}^* = b_1^* \hat{y}_1 + \ldots + b_p^* \hat{y}_p . \quad (7)$$

Коэффициенты $b_k^* (k = 1, \ldots, p)$ определяются по формуле

$$b_k^* = \sum_{j=1}^{p} v_{jk}^{-1} \Big/ \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} v_{jk}^{-1} \quad (8)$$

где v_{jk}^{-1} — элементы матрицы, обратной V. В свою очередь элементы v_{jk} матрицы V размера $(p \times p)$ определяются выражением

$$v_{jk} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_j)(y_i - \hat{y}_k) \quad (9)$$
$$1 \le i \le n, 1 \le j \le p, 1 \le k \le p,$$

здесь y_i — экспериментальное значение выходной переменной в i-м наборе данных.

Для проверки того, что b_j^* отличается от некоторой постоянной величины ã подсчитывается величина

$$t = (b_j^* - \tilde{a}) \big/ s_{b_j^*} , \quad (10)$$

где

$$s_{b_j^*}^2 = \sigma_{\hat{y}^*}^2 \left\{ v_j^{-1} - (b_j^*)^2 \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} v_{jk}^{-1} \right\}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\hat{y}^*}^2 = \frac{1}{n-p+1} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} v_{jk}^{-1}}, \quad (12)$$

и сравнивается с табличной величиной $t_{1-\alpha/2}$ Для $n-p$ степеней свободы. При $\tilde{a} = 0$ таким образом проверяется значимость отличия b_j^* от нуля. Для того чтобы проверить, значимо ли отличие разности $b_j^* - b_k^*$ от постоянной величины ã, величина t вычисляется по формуле

$$t = \left[(b_j^* - b_k^*) - \tilde{a} \right] \Big/ \left[s_{b_j^*}^2 + s_{b_k^*}^2 - 2\operatorname{cov}(b_j^*, b_k^*) \right]^{1/2} , \quad (13)$$

где

$$\operatorname{cov}\left(b_j^*, b_k^*\right) = \sigma_{\hat{y}^*}^2 \left\{ v_{jk}^{-1} - b_j^* b_k^* \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} v_{rs}^{-1} \right\}. \quad (14)$$

Если рассматриваемая разность значимо отличается от нуля, то b_j^* и b_k^* отличны друг от друга, и регрессия $\hat{y}_j$ дает лучшее приближение к экспериментальным данным, чем регрессия $\hat{y}_k$. Со значительно большими трудностями связан выбор одной из нескольких нелинейных моделей.

В случае использования регрессионных математических моделей наиболее совершенным и надежным является шаговый регрессионный метод, который по существу является улучшенным вариантом метода включения.

Важнейшей составляющей задачи идентификации является выбор информативных переменных, оказывающих существенное влияние на выходную переменную, который позволяет получить модель, пригодную для решения задач управления.

Если есть основание предположить нормальность совокупности параметров, описывающих технологический объект, для выделения существенных параметров может быть использован корреляционный анализ [16, 43, 110]. Парный коэффициент корреляции случайных переменных Y и X вычисляется по формуле

$$r = \operatorname{cov}(y, x) / \sigma_y \sigma_x, \quad (15)$$

здесь σ_y^2, σ_x^2 — оценки дисперсий переменных Y и X, а $\operatorname{cov}(y, x)$ — ковариация между ними:

$$\operatorname{cov}(y, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_x)(y_i - m_y) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - m_x m_y. \quad (16)$$

В последней формуле N — число наблюдений; m_x, m_y — оценки математических ожиданий случайных переменных Y и X. Напомним, что коэффициент парной корреляции $r_{xy} = r$ является оценкой линейной связи величин X и Y.

Если на входе объекта имеются две переменные x_1 и x_2, то частный коэффициент корреляции выхода y с x_1 вычисляется по формуле

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_2}^2\right)\left(1 - r_{x_1 x_2}^2\right)}} \quad (17)$$

Эту же формулу можно получить, воспользовавшись определителем, составленным из коэффициентов парной корреляции

$$|c| = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1 x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_1 x_2} & 1 \end{vmatrix} \quad (18)$$

Для $r_{yx_1 \cdot x_2}$ будем иметь

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = -c_{12} / (c_{11} c_{22})^{1/2}, \quad (19)$$

здесь c_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу r_{ij} в определителе (2.14). Аналогично и для случая, когда на входе технологического объекта имеются n переменных $x_1, \ldots, x_n$, частный коэффициент корреляции $r_{yx_1 \cdot x_2, \ldots, x_n}$ определится формулой (2.15), где c_{12}, c_{11}, c_{22} — алгебраические дополнения в определителе (2.16)

$$|c| = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & \cdots & r_{yx_n} \\ & 1 & \cdots & r_{x_1 x_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & r_{x_{n-1} x_n} \\ & & & 1 \end{vmatrix} \quad (20)$$

Использование частных коэффициентов корреляции позволяет избежать трудоемкой экспериментальной работы и определить чистые влияния переменных, на основе имеющихся экспериментальных данных нормальной эксплуатации.

В предположении нормального многомерного распределения параметров, характеризующих технологический объект, путем расчета и анализа коэффициентов парной, частной и множественной корреляции могут быть выделены наиболее существенные, информативные переменные.

Всегда целесообразно стремиться к тому, чтобы математическая модель включала по возможности минимальное количество переменных. Если речь идет о регрессионных математических моделях, то методами решения этой задачи могут служить метод всех возможных регрессий, методы исключения и включения, шаговый и ступенчатый регрессионный анализ. Наиболее совершенным и надежным является шаговый регрессионный метод, который по существу является улучшенным вариантом метода включения.

Выделение существенных переменных на основе методов ранговой корреляции

Эффективным средством выбора существенных переменных является формализация опыта специалистов, инженеров, технологов, хорошо знающих физико-химические закономерности, присущие рассматриваемому технологическому объекту.

Методы формализации опыта специалистов в статистике объединяются под названием методов ранговой корреляции. Пусть значение выходной переменной y технологического объекта зависит от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Предположим, что двум $(\mathrm{m}=2)$ исследователям предложено каждой переменной присвоить ранг — натуральное число $a_j \left(1 \le a_j \le n\right)$ таким образом, что та переменная, которая, по мнению исследователя, в наибольшей мере влияет на выходную величину, располагается в начале ранжировочного ряда. Если первый исследователь присвоил переменным ранги $a_1, \ldots, a_n$, а второй $b_1, \ldots, b_n$, то величина

$$d_k = a_k - b_k \qquad (21)$$

является удобной характеристикой тесноты или согласованности мнений двух исследователей относительно k-й переменной. Однако сумма d_k для всех n переменных равна нулю, поэтому величина (2.20) не может быть использована для оценки согласованности мнений исследователей относительно n переменных. Если ввести величину

$$S\left(d^2\right) = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - b_k\right)^2, \qquad (22)$$

то мерой согласованности мнений двух исследователей относительно переменных может быть коэффициент корреляции Спирмена

$$\tilde{n} = 1 - 6S\left(d^2\right) / \left(n^3 - n\right), \qquad (23)$$

величина которого изменяется в пределах от –1 до +1. Если корреляция рангов является полной (мнения исследователей совпадают), то все $d_k = 0$ и $\tilde{n} = 1$. Если мнения исследователей противоположны, а именно: первый присваивает переменной x_k ранг a_k, а второй той же переменной ранг $b_k = \left(n + 1 - a_k\right)$, то коэффициент корреляции Спирмена $\tilde{n} = -1$. Для оценки согласованности мнений двух исследователей может быть применен и коэффициент корреляции $\hat{o}$

$$\hat{o} = 1 - 2s \Big/ \frac{1}{2} n\left(n-1\right), \qquad (24)$$

где

$$s = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} n\left(n-1\right) - S\right] \qquad (25)$$

S — общая сумма приписанных значений, ее формирование детально обсуждается в работе [44].

Может быть рассмотрен случай, когда ранжировку (упорядочение по степени важности или влияния на выходную переменную) проводят более 2-х специалистов.

Методы ранговой корреляции являются эффективным средством выделения информативных переменных особенно в тех случаях, когда исследуемый объект недостаточно изучен теоретически, когда имеющаяся априорная информация противоречива и не поддается толкованию на основе имеющихся теоретических представлений.

Заключение

Для обеспечения идентичности математической модели реальному объекту и создания эффективной системы его управления необходимо, на стадии создания математической модели объекта управления, решение следующих основных задач:

- выбор структуры модели и выбор информативных переменных на основе корреляционного анализа;
- выделение существенных переменных на основе методов ранговой корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Идентификация и диагностика систем: учеб. для студ. высш. учеб. заведений/ А. А. Алексеев, Ю. А. Кораблев, М. Ю. Шестопалов.— М.: Издательский центр «Академия», 2009.— 352 с.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. -М.: Наука, 1991.— 432 с.
3. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие.— Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003.— 211 с.
4. Современные методы идентификации систем/Под ред. П. Эйкхоффа.— М.: Мир, 1983.— 400 с.
5. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации.— М.: Наука, 1984.— 320 с.

6. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа.— М.: Мир, 1983.— 312 с.
7. Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Кн. 1,2./ Пер. с англ.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Финансы и статистика, 1986.— 366 с.
8. Огарков М. А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990.— 208 с.

Санкт-Петербургский Политехнический Университет им. Петра Великого