ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДРОБНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЭКСПОНЕНТЫ, ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ НАБЛЮДЕНИЯ

Иванов Д. В.,
Самарский государственный университет путей сообщения,
dvi85@list.ru

Аннотация. *В статье предложен метод идентификации параметров обобщенной дробной экспоненты, являющейся решением линейного дифференциального уравнения.*

Результаты моделирования подтвердили высокую эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: *производная дробного порядка, метод наименьших квадратов, помеха наблюдения.*

IDENTIFICATION FRACTIONAL GENERALIZATION EXPONENT, THE PRESENCE OF NOISE OBSERVATIONS

Ivanov D.V.,
Samara State University of Transport

Abstract. *The authors propose a method to identify the parameters of the generalized fractional exponent, which is the solution of a linear differential equation of fractional order.*

Simulation results confirm the high efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: *Fractional Derivative, least squares method, the interference observation.*

Введение

Дробный математический анализ имеет давнюю историю. Впервые мысль о возможности существования производной нецелого порядка была высказана Лопиталем в письме Лейбницу в 1695. В дальнейшем исследованиями в области дробного математического анализа занимались многие математики, в том числе, Лагранж, Эйлер, Лиувилль, Риман, Адамар, Харди, Соболев. Однако применение аппарата дробного математического анализа для приложений началось только во второй половине XX века. На сегодняшний день существует большое число примеров применения аппарата дробного дифференцирования в физике, теории управления и других инженерных приложениях [1,2,3,4,5].

Еще более обширному применению моделей, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, мешает отсутствие простой геометрической и физической интерпретаций, существующей у интегралов и производных целых порядков. Подлюбный [6] отмечал, что проблеме интерпретации дробных интегралов и производных уже 300 лет и она до сих пор окончательно не решена.

В современной науке популярны, так называемые марковские модели процессов, в которых состояние процесса в будущем зависит только от состояния в текущий момент времени. Данное допущение, существенно упрощает анализ, однако, очевидно, что не все реальные процессы являются марковскими или могут быть к ним сведены.

Наличие в уравнениях дробной производной современными исследователями интерпретируется как отражение особого свойства процесса – памяти или немарковости (*эредитарности*) [1]. Следует отметить, что одной из причин по которым процесс становится эредитарным является наличие переменных неучтенных в модели.

В настоящее время активно развиваются методы идентификации динамических систем с уравнениями и разностями дробного порядка. В статьях рассматривается идентификация непрерывных систем [7,8] при отсутствии помех, в[9-13].

1. Интегралы и производные дробного порядка

Производная дробного порядка вводится через определение дробного интеграла. Известно, что n-кратный интеграл можно представить в виде:

$$\int_a^t dt \int_a^t dt \ldots \int_a^t \phi(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1}\phi(x)dx,$$

заменяя $(n-1)!$ гамма-функцией $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt$, можно придать смысл формуле для n нецелого порядка. Интегрирование нецелого порядка $\alpha > 0$ определяется по формуле[10]:

$$I^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\phi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

где I^α – оператор дробного интегрирования;

Операцию дробного дифференцирования определяют как операцию обратную дробному интегрированию:

$$D^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{\phi(x)dx}{(x-t)^\alpha}, \tag{2}$$

где D^α – оператор дробного дифференцирования, $0 < \alpha < 1$.

Дробную производную (2) принято называть производной Римана-Лиувилля. Следует отметить, что отметить, что существуют и другие определения дробной производной: производная Капуто, производная Грюнфельда-Летникова, производная Маршо и т.д.

2. Дифференциальные уравнения с дробными производными

Экспонента входит в состав значительного числа математических моделей.

Данную модель можно интерпретировать как решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \gamma\phi(t) \Rightarrow \phi(t) = A\exp(\gamma \cdot t) \tag{3}$$

Обобщение дифференциального уравнения (3) на случай производной дробного порядка будет иметь вид:

$$D^\alpha \phi(t) = \gamma\phi(t), \tag{4}$$

решение уравнения (4) имеет вид [10]:

$$\phi(t) = A \cdot t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(\gamma t^\alpha), \tag{5}$$

где $E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha \cdot t + \beta)}$ – двухпараметрическая функция Миттаг-Лефлера.

Решение уравнения (4) можно записать через обобщенную дробную экспоненту:

$$Exp(\alpha, \lambda, t) = t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(\gamma t^\alpha).$$

В преобразованиях Лапласа дробная обобщенная экспонента имеет очень простую форму записи [4,16]:

$$\Phi(s) = L\left[A \cdot t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(\gamma t^\alpha)\right] = \frac{A}{s^\alpha - \gamma}. \tag{6}$$

3. Идентификация обобщенной дробной экспоненты

Идентификация параметров экспоненты A, γ. При наличии помех является сложной задачей в силу нелинейности по параметру γ.

В [15] предложен метод на основе Z-преобразования, позволяющий свести задачу оценивания параметров экспоненты к оцениванию параметров авторегрессии.

Представляет интерес обобщить, полученные в [15] для экспоненты результаты на случай идентификации параметров A, γ обобщенной дробной экспоненты.

Пусть имеются зашумленные наблюдения

$$y_i = A \cdot (\Delta \cdot i)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(\gamma \cdot (\Delta \cdot i)^\alpha\right) + \xi_i, \tag{7}$$

где Δ – интервал дискретизации, $i = \{0,1,2\ldots,N\}$, ξ_i – стационарная в узком смысле последовательность независимых случайных величин с $E\{\xi_i\}=0,\ E\{(\xi_i)^2\}=\sigma_1^2>0,$ и для некоторой постоянной π_ξ: $|\xi_i|<\pi_\xi$ п.н., где E - оператор математического ожидания.

Z-преобразования от обобщенной дробной экспоненты не существует, но используя изображение по Лапласу (6), можно определить приближенные параметры авторегрессии. В [17] предложено использовать для аппроксимации дробного интегратора двухпараметрическую дискретную передаточную функцию, называемую Т-интегратором:

$$\frac{1}{s}=\frac{\lambda\Delta\left(\beta+(1-\beta)z^{-1}\right)}{1-z^{-1}}, \tag{8}$$

где $\lambda,\ \beta$ – настраиваемые параметры.

Из (8) при $\lambda=1,\ \beta=\{1,1/2\}$ получаются общеизвестные правила дискретизации непрерывных передаточных функций: правило Эйлера (метод прямоугольников), правило Тастина (билинейное преобразование). Сделаем замену переменной:

$$s^\alpha=\left(\frac{1}{\lambda\Delta}\frac{1-z^{-1}}{\left(\beta+(1-\beta)z^{-1}\right)}\right)^\alpha,$$

Используя разложение в ряд тейлора получим:

$$H^\alpha(z^{-1})=\left(\frac{1}{\lambda\Delta}\frac{1-z^{-1}}{\left(\beta+(1-\beta)z^{-1}\right)}\right)^\alpha=$$

$$=\left(\frac{1}{\lambda\Delta}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\beta^{(\alpha+k-j)}(1-\beta)^{k-j}\binom{j-\alpha-1}{j}\binom{-\alpha}{k-j}\right)z^{-k}=$$
$$=\left(\frac{1}{\lambda\Delta}\right)^\alpha\left(h_0+h_1z^{-1}+\ldots+h_nz^{-n}\right)=\left(\frac{1}{\lambda\Delta}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}h_kz^{-k}, \tag{9}$$

где $\binom{j-\alpha-1}{j}$ и $\binom{-\alpha}{k-j}$ – обобщенные биномиальные коэффициенты:

$$\binom{j-\alpha-1}{j}=\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)},$$

$$\binom{j-\alpha-1}{k-j}=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(k-j+1)\Gamma(j-k-\alpha+1)},$$

подставляя (9) в (6) и принимая $\lambda=1$, получим, что дискретная передаточная функция имеет вид:

$$\Phi'(z^{-1})=\frac{A\cdot\Delta^\alpha\Big/\left(h_0-\gamma\cdot\Delta^\alpha\right)}{1+\dfrac{1}{h_0-\gamma\cdot\Delta^\alpha}\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_kz^{-k}}, \tag{10}$$

С учетом свойства смещения Z – преобразования, вернувшись в область оригиналов, представление будет иметь авторегрессию значений тренда:

$$x_i=\frac{1}{\gamma\cdot\Delta^\alpha-h_0}\sum_{k=1}^{\infty}h_kx_{i-k}+\frac{A\cdot\Delta^\alpha}{h_0-\gamma\cdot\Delta^\alpha}\delta_i, \tag{11}$$

$$y_i=x_i+\xi_i,$$

где $y_i=0$ при $i=0$ к < 0, $\delta_i=\begin{cases}1,\ i=0\\0,\ i\neq0\end{cases}$ – дискретный аналог дельта - функции.

Данная авторегрессия имеет бесконечное число коэффициентов, однако выборка, по которой определяется λ всегда конечна, кроме того коэффициенты $h(k)$ быстро убывают поэтому бесконечную сумму в (11) можно заменить конечной:

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}\tilde{h}_kx_{i-k}+\frac{A\cdot\Delta^\alpha}{h_0-\gamma\cdot\Delta^\alpha}\delta_i, \tag{12}$$

$$y_i=x_i+\xi_i,$$

где $\tilde{h}_k=h_k\Big/\left(\gamma\cdot\Delta^\alpha-h_0\right),\ k=\overline{1,n}.$

Так как при наличии помехи наблюдения метод наименьших квадратов (МНК) дает несостоятельные оценки параметров, воспользуемся обобщением МНК – полным методом наименьших квадратов [18]. Найдем для $i\geq2$ обобщенную ошибку:

$$\varepsilon_i = y_i - \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k y_{i-k} = \xi_i - \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k \xi_{i-k},$$

тогда дисперсия обобщенной ошибки:

$$E\left\{\varepsilon_i^2\right\} = E\left(y_i - \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k y_{i-k}\right)^2 =$$

$$= \sigma_\xi^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k^2\right) = \sigma_\xi^2 \left(\omega(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n)\right).$$

определим оценку $\hat{\tilde{h}}_1, \ldots, \hat{\tilde{h}}_n$ неизвестных параметров $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n$ из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщенных ошибок $\left\{\varepsilon_i^2\right\}$ с весом $\omega(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n)$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \hat{\tilde{h}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\tilde{h}}_n \end{pmatrix} = \arg\min_{\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k y_{i-k}\right)^2}{1 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k^2}. \qquad (13)$$

Оценку параметра $\hat{\gamma}$ определит соотношение:

$$\hat{\gamma} = \frac{h_1 + \tilde{h}_1 h_0}{\tilde{h}_1 \Delta^\alpha}.$$

Параметр A входят в модель (5) линейно и может быть оценен с помощью МНК

$$\hat{A} = \arg\min_{A} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - A \cdot (\Delta \cdot i)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(\hat{\gamma} \cdot (\Delta \cdot i)^\alpha\right)\right)^2. \qquad (14)$$

4. Результаты моделирования

Предложенный подход был реализован для в Matlab. Рассмотрим в качестве примера рассмотрим идентификацию функции:

$$y_i = 5 \cdot (0.1 \cdot i)^{0.35-1} \cdot E_{0.35,0.35}\left(-0.9 \cdot (0.1 \cdot i)^{0.35}\right) + \xi_i, \qquad (15)$$

число наблюдений равно $N = 20.$ В качестве показателей качества модели использовались коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{z}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{N} (y_i - E[y_i])^2,$$

и MAPE-ошибка прогноза на 2 шага вперед

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=N+1}^{N+2} \left| \frac{z_i - \hat{z}_i}{z_i} \right| \cdot 100\%,$$

кроме того проводилась идентификация, имеющихся наблюдений экспоненциальным трендом (3). На рисунке 1 представлены: истинная модель (15), модель с оцененными параметрами и аппроксимация экспонентой.

В таблице 1 приведены результаты моделирования:

Таблица 1

γ	$\sigma_\xi^2 / \sigma_\xi^2$	R^2 для обобщенной экспоненты	R^2 для экспоненты	M, % для обобщенной экспоненты	M, % для экспоненты
-0,9	0	0.9996	0.8836	5.15	99.73
	0.1	0.9207	0.8120	8.76	99.91
	0.2	0.8086	0.6507	11.51	99.91
	0.3	0.7943	0.7524	25.77	99.98

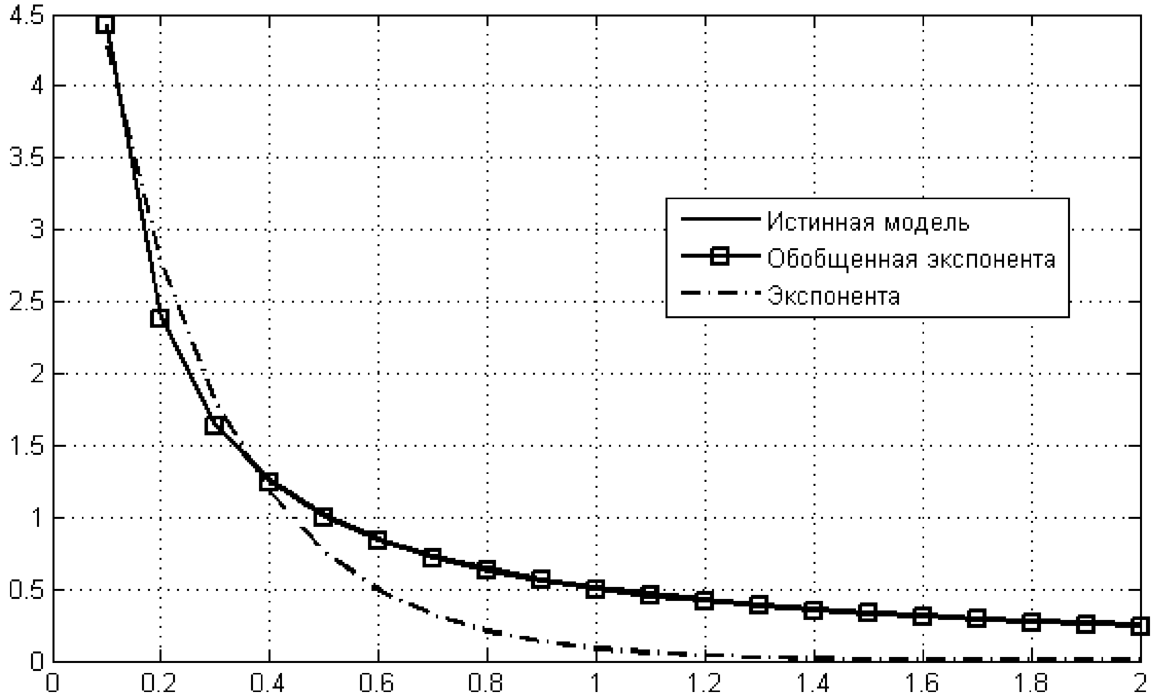

Рис. 1. График истинной модели и ее аппроксимаций.

Заключение

В работе предложен алгоритм идентификации обобщенной дробной экспоненты, являющейся решением простейшего дифференциального уравнения дробного порядка. Предложенный в статье подход может быть обобщен на случай идентификации решения более сложных уравнений дробного порядка.

Список литературы

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272с.
3. В.В.Васильев, Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание — Киев, НАН Украины, 2008. — 256 с.
4. Das S. Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer, 2008, 250p.
5. Advances in Fractional Calculus Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering /Sabatier, J., Agrawal, O. P., Tenreiro Machado, J. A. (Eds.). Springer, 2007, 552 p.
6. Podlubny I. Geometric and physical interpretation fractional integration and fractional differentiation // Fract. Calc. Appl. Anal. 5, 2002, pp. 367-382.
7. Бойков И.В., Кривулин Н.П. Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков// Метрология. 2013. №9. С. 3-16.

8. Бойков И.В., Кривулин Н.П. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2013. №2 (26). С. 120-129.
9. Иванов Д.В. Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале //Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. №5-2. С. 2534-2536.
10. Иванов Д.В., Ширинов И.Р. Идентификация многомерныхпо входу линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале //Вестник Самарского института управления, №4 (27) С.144-151.
11. Иванов Д.В. О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале //Стохастическая оптимизация в информатике. – Том 1, №2, 2013. – С.21-32.
12. Иванов Д.В. Численный алгоритм оценивания параметров линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале. // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. 2014. Т. 1. №1. С. 53-63.
13. Иванов Д.В. Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале// Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. - №2(27), 2014. С.43-50.
14. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
15. Семенычев В.К. Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии. – Самара: АНО «Изд-во СНЦ РАН», - 2004. – 243 с.
16. Авсиевич А. В. Решение одного вида однородного дифференциального уравнения дробного порядка на основе преобразования Лапласа// Вестник СамГАПС: Науч. -техн. журнал. - 2006. - N 5(9). - с. 46-53.
17. R.S. Barbosa R.S., J.A.T. Machado J.A.T., M.F. Silva M.F. Time domain design of fractional differintegrators using least-squares // Signal Processing, 2006, pp.2567-2581.
18. Жданов А.И., Кацюба О.А. Идентификация методом наименьших квадратов уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений. //Автоматика и телемеханика - 1982. - №2 – с.29-32.