ЭРГОДИЧНОСТЬ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ КРУПНОГО ГОРОДА РЕАЛИЗАЦИЕЙ ПРОЦЕССОВ С ЗАПРЕТАМИ

SIMULATION ERGODICITY OF TRAFFIC FLOWS OF A LARGE CITY BY EXCLUSION TYPE PROCESSES

S. Matsievsky
S. Drozdetsky
I. Dubinin

Summary. Four properties of ergodic dynamic systems are investigated. A mathematical model for exclusion type process is presented. A density and a velocity and there average values are introduced. Dynamics and Markov processes are added. The dynamic coupling is defined and its advantage is demonstrated. The received statements are used for the proof of ergodic properties of exclusion type dynamic processes.

Keywords: ergodic property, density, velocity, exclusion process, dynamic process, Markov process, coupling, dynamic coupling, fundamental diagram.

Мациевский Сергей Валентинович
Доцент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
sergei.matsievsky@ya.ru
Дроздецкий Семен Андреевич
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)
Дубинин Иван Витальевич
Аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград)

Аннотация. Рассмотрены и охарактеризованы четыре свойства эргодических динамических систем. Представлена некоторая шаровая математическая модель процессов с запретами и две характеристики этих процессов: плотность и скорость, а также их средние. Добавлена динамика на этой модели, в итоге получены марковские процессы. Введено понятие динамического каплинга и показано его преимущество перед обычным каплингом. Полученные утверждения использованы для доказательства эргодичестких свойств динамических процессов с запретами.

Ключевые слова: свойство эргодичности, плотность, скорость, процесс с запретами, динамический процесс, марковский процесс, каплинг, динамический каплинг, фундаментальная диаграмма.

Введение

Продолжая рассматривать современное моделирование транспортных потоков (см. [1–3]), нельзя не коснуться последних принципиально новы алгоритмов, связанных с эргодичностью и процессами с запретами.

В теории вероятностей так называемый простой асимметричный процесс с запретами (asymmetric simple exclusion process, ASEP) [4] — это взаимодействующая система случайно блуждающих частиц, которые взаимодействуют по *закону исключенного объема* (hard core). Этот процесс с запретами был введен в 1970 году Фрэнком Спитцером для дискретных решеточных марковских процессов [5]. С тех пор в физико-математической литературе было опубликовано о нем много статей, и этот процесс с запретами стал даже стохастической моделью по умолчанию для транспортных явлений [4].

Следует отметить, что существует два качественных вида процессов с запретами взаимодействий частиц:

1) синхронный;
2) асинхронный.

При синхронном процессе все имеющиеся частицы сдвигаются одновременно, при асинхронном движение происходит не более чем по одной частице [6].

Как правило, при анализе решеточных систем приходят к алгоритмическому использованию комбинаторной структуры системы частиц. Однако в непрерывной среде аналоги таких структур трудно найти, приходится создавать новый фундаментальный алгоритмический подход. Процессы с запретами поэтому являются новыми в непрерывной среде, причем в чисто фундаментальной математике, а не только при моделировании транспортных потоков. Не так давно в [7] были получены первые результаты по этому новому направлению. В указанной статье была предложены оригинальные алгоритмы, которые дают возможность исследовать *эргодические свойства* указанных процессов с запретами. Отметим, что алгоритмическим нововведением служит *метод динамического каплинга*.

1. Эргодические свойства

Раз уж речь зашла об эргодичности, отметим, что в алгоритмических исследованиях опираются не на само определение эргодичности, а на его свойства. Само понятие эргодичности было рассмотрено в статье [1]. Приведем и обсудим некоторые из свойств эргодичности вслед за Я. Г. Синай [8–11].

1.1. Свойство эргодичности. Это свойство формулируют по-разному, например следующим образом: преобразование T *эргодично*, если в эргодической теореме Биркгофа — Хинчина [5] для любой функции $f(x) \in L^1(M, \mu)$ предельная функция $\hat{f}$ является константой, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \hat{f} = \int_M f(x)d\mu(x)$$

почти всюду.

В теории вероятностей такой вид имеет усиленный закон больших чисел: средние сходятся почти наверняка к математическому ожиданию. На самом деле свойство эргодичности означает неразложимость системы на нетривиальные инвариантные подмножества.

Определение 1. Множество A называется *инвариантным*, если $A = T^{-1}A$, и *инвариантным* mod 0, если $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$.

Довольно легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Эргодичность эквивалентна следующему условию: для всякого инвариантного* mod 0 *множества A его мера* $\mu(A)$ *равна* 1 *или* 0.

Сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Для любого инвариантного* mod 0 *множества A найдется такое инвариантное множество* $A1$, *для которого* $\mu(A\Delta A_1) = 0$.

Доказательство. В самом деле, положим вначале

$$B = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k} A.$$

Ясно, что $\mu(A\Delta B) = 0,\ T^{-1}B \supset B,\ \mu(B \setminus T^{-1}B) = 0.$

Тогда множество

$$A_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} B$$

будет искомым, поскольку

$$T^{-1}A == \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} B = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} B.$$

Последнее равенство вытекает из того, что $B \subset T^{-1}B$. Таким образом, $A_1 = T^{-1}A_1$. Ясно также, что $\mu(A_1 \Delta A) = 0$. □

Доказательство теоремы 1. Пусть T эргодично. Возьмем какое-либо инвариантного mod 0 множество A. Найдем отличающееся от него на множество меры 0 инвариантного множество $A1$. Для индикатора χ_{A_1} среднее

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_1}(T^k x)$$

равно 1 или 0, в зависимости от того, $x \in A_1$ или $x \notin A_1$. Но в силу эргодичности это среднее должно при $n \to \infty$ стремиться к

$$\int \chi_{A_1}(x)d\mu(x) = \mu(A_1).$$

Отсюда вытекает, что $\mu(A_1) = 0$ или 1, а следовательно, то же верно и для множества A.

Обратно, пусть для любого инвариантного mod 0 множества A $\mu(A) = 1$ или 0. Тогда, взяв любую функцию $f(x) \in L^1(M,\mu)$ и ее временно́е среднее $\hat{f}$, мы получим, что для любых двух чисел $a \leqslant b$ множество $E_a^b(\hat{f}) = \{x : a \leqslant \hat{f} \leqslant b\}$ будет инвариантным mod 0.

Но тогда $\mu(E_a^b(\hat{f})) = 1$ или 0. Это означает, что $\hat{f} = \mathrm{const}$ почти всюду. □

1.2. Свойство перемешивания. Преобразование T (автоморфизм или эндоморфизм) обладает свойством *перемешивания*, если для любых функций $f, g \in L^2(M, \mu)$ при больших n функции $f(Tnx)$, $g(x)$ становятся статистически независимыми. Формально для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f(T^n x)g(x)d\mu(x) = \int_M f(x)d\mu(x) \cdot \int_M g(x)d\mu(x).$$

Например, если A, B — множества, χ_A и χ_B — их индикаторы, то независимость χ_A и χ_B означает, что точки, которые в начальный момент находились во множестве B, с течением времени равномерно распределяются по всему пространству. Поэтому в системах с перемешиванием весьма трудно различить точки, которые достаточно долгое время назад были или не были во множестве A.

Пусть $\rho(x)$ — неотрицательная измеримая функция, для которой

$$\int_M \rho(x)d\mu(x) = 1.$$

Можно ввести новую меру ν_0, абсолютно непрерывную относительно μ, для которой

$$\frac{d\nu_0(x)}{d\mu(x)} = \rho(x).$$

Физик назвал бы ν0 *неравновесным распределением*.

Мы можем ввести в рассмотрение эволюцию меры ν0, положив $\nu_n(A) = \nu_0(T^{-n}A)$. Тогда в случае преобразования с перемешиванием

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f(x) d\nu_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_M f(x)\rho(T^n x) d\mu(x) = \quad f \ x \ d\mu \ x$$
$$= \int_M f(x) d\mu(x),$$

что означает, что неравновесное распределение стремится к равновесному. Подчеркнем, что одной эргодичности для этого недостаточно. Кроме того, сходимость в последнем соотношении отнюдь не означает, что $\rho(T^n x)$ поточечно сходится к 1.

1.3. Центральная предельная теорема (ЦПТ). Для заданной фун к ции f рассмотрим выражение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \hat{f}\text{, где } \hat{f} = \int_M f(x) d\mu(x).$$

ЦПТ состоит в том, что существует число $\sigma > 0$, при котором

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{ x : \sigma\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \hat{f}\right] < \alpha \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2} du.$$

Мы будем говорить, что *динамическая система обладает ЦПТ*, если это предельное соотношение имеет место для достаточно богатого класса функций $f(x)$.

ЦПТ означает, что последовательность случайны величин $f(T^n x)$ ведет себя подобно последовательности независимых случайных величин. Кроме того, ЦПТ показывает, что в эргодической теореме Биркгофа — Хинчина разность

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \hat{f} \text{ имеет порядок } \frac{1}{\sqrt{n}},$$

но следующего члена асимптотики написать нельзя: при больших n выражение

$$\sigma\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \hat{f}\right]$$

не стремится ни к какому пределу, а имеет только предельное распределение.

1.4. Свойство экспоненциального убывания корреляций. Пусть функция f такова, что

$$\int_M f(x) d\mu(x) = 0.$$

Говорят, что для функции f имеет место *экспоненциальное убывание корреляций*, если существует число q, $0 < q < 1$, такое, что

$$\left| \int_M f(T^k x) f(x) d\mu(x) \right| \leqslant C(f) q^k.$$

Группа $\{Tn\}$ обладает этим свойством, если последнее неравенство имеет место для достаточно богатого запаса функций.

2. Эргодические свойства процессов с запретами

2.1. Основные определения. Введем для частиц в пространстве понятия плотности, скорости и средней скорости [6].

Определение 1. *Конфигурация* частиц радиуса r, обозначаемая через $x(r) \equiv \{xi(r)\}$, $xi(r) \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$,— это бесконечная последовательность $\ldots x_{-1} \leqslant x_0 \leqslant x_1 \ldots$

При описании движения эти частиц им *запрещено* пересекаться, они могут только касаться. Получаем процессы с запретами:

Определение 2. $x(r)$ *допустима*, если $\forall i \in \mathbb{Z}$ $x_i(r) + r \leqslant x_{i+1}(r) - r$. Пространство всех допустимых конфигураций обозначим через $X(r)$.

Частицы являются центрами шаров радиуса $r > 0$. В предельном случае $r = 0$ обозначим $x_i \equiv x_i(0)$, $x \equiv x(0)$, $X \equiv X(0)$.

Определение 3. *Плотность* $\rho(x(r), I)$ *на отрезке* $I = [a, b] \in \mathbb{R}$, $a < b$, конфигурации $x(r)$ равна

$$\frac{\left|\{x_i(r) : x_i(r) \in I\}\right|}{|I|}.$$

Плотность $\rho(x(r))$ для $x(r)$ равна среднему количеству частиц в единичном отрезке, т.е. пределу

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x(r), I_n)$$

для любой последовательности *вложенных* отрезков $\{In\}$ с

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = \infty,$$

если он корректно определен. Иначе берем (по всем возможным коллекциям $\{In\}$) верхнюю и нижнюю плотности частиц $\rho\pm(x(r))$.

Приведем два простых факта.

1. Очевидно, что если $\rho(x(r))$ конечно, т.е. $\rho(x(r)) < \infty$, то обратная величина $\rho(x(r))^{-1}$ равна среднему расстоя-

нию между центрами частиц (в [6] опечатка, отсутствует знаменатель):

$$\frac{1}{\rho(x(r))} = \lim_{|n-m|\to\infty} \frac{|x_n(r) - x_m(r)|}{|n-m|}.$$

2. Возьмем две конфигурации $x(r) \in X(r)$ и $x \in X$ с одинаковыми последовательность промежутков между соседними частицами. Если заданному отрезку I длиной $|I|$ принадлежат n частиц x_i, то соответствующие n частиц $x_i(r)$ займут отрезок I_r длиной $|I_r| = |I| + 2rn$. Тогда

$$\rho(x(r), Ir) = \frac{n}{|I_r|} = \frac{n}{|I| + 2rn} = \frac{n/|I|}{1 + 2rn/|I|} = \frac{\rho(x, I)}{1 + 2r\rho(x, I)}.$$

Отсюда $\rho\pm(x(r)) = \dfrac{\rho_\pm(x)}{1 + 2r\rho_\mp(x)}$.

Теперь определим в пространстве конфигураций *динамику*. Пусть конфигурация — это одна частица, которая в начальный момент времени расположена в точке $x_0^t \in \mathbb{R}$. Тогда $x_0^{t+1} = x_0^t + v_0^t$, где $\{v_0^t\}$ представляет собой последовательность величин (случайных величин).

Определение 4. назовем *локальными скоростями* частицы в момент времени t.

Короче, имеем случайное блуждание в $\mathbb{R}$.

Перейдем к бесконечной конфигурации $x(r) \in X$.

Определение 5. v_i^t, $i \in \mathbb{Z}$, назовем *локальными скоростями* частиц $xi(r)$ в момент t. В этот раз имеем уже бесконечный набор случайных блужданий при аксиомах сохранения порядка и исключенного объема.

В дальнейшем ограничимся неотрицательными скоростями для интерпретации в задачах моделирования транспортных потоков.

Достаточно очевидна следующее утверждение.

Лемма 2. *По отношению к динамике инвариантны как верхняя, так и нижняя плотности* $\rho\pm(x^t)$: $\forall t\ \rho_\pm(x^t) = \rho_\pm(x^{t+1})$.

Введем понятие средней скорости.

Определение 6. $V(x, i, t) = \dfrac{x_i^t - x_i^0}{t}$

назовем *средней скоростью* частицы xi в момент времени $t > 0$.

$$V(x, i) = \lim_{t\to\infty} V(x, i, t)$$

назовем *средней скоростью* частицы xi, если предел существует. Иначе вводим $V_\pm(x, i)$ как верхнюю и нижнюю скорости частицы xi.

Лемма 3. $\forall i, j \in \mathbb{Z}\ \forall x \in X$ почти всюду

$$\lim_{t\to\infty} |V(x, i, t) - V(x, j, t)| = 0.$$

Следствие 1. $V_\pm(x, i)$ не зависят от i.

2.2. Каплинг. *Каплинг* связан с понятием марковских процессов.

Определение 7. *Случайный процесс* — индексированные параметром *случайные величины*, параметром может выступать время [12].

Определение 8. *Марковский процесс* — случайный процесс, «будущее» которого не зависит от «прошлого» при известном «настоящем». Другими словами, если значение процесса в данный момент известно, то дальнейшее развитие процесса не зависит от предыдущего [13].

Определение 9. *Каплинг* двух марковских процессов x^t и y^t в пространстве X — их представление на общем вероятностном пространстве. Иначе, *каплинг* — вероятностный процесс (т.е. эволюция вероятностей P) пар (x^t, y^t) в пространстве $X \times X$, при этом проекции процесса пар эволюционируют точно так, как исходные:

$$P((x^t, y^t) \in A \times X) = P(x^t \in A),\ P((x^t, y^t) \in X \times A) = P(y^t \in A).$$

Рассмотрим конструкции каплинга марковских процессов xt, yt.

Определение 10. *Равный каплинг* — спаривание частиц процессов x^t, y^t, занимающих одинаковые позиции, в *пару* частиц. После спаривания элементы пары имеют общие случайные скорости.

Равный каплинг не работает для нашего синхронного процесса с запретами взаимодействий частиц по двум причинам.

1. Когда сразу любое количество частиц может переместиться, то при этом две частицы разных процессов xt, yt могут обогнать друг друга и ни в какой момент времени не занять одну и ту же позицию.

2. Движение только одной частицы из пары может оказаться заблокированным третьей частицей. Тогда при движении этих трех частиц пара уничтожится, а новой пары не образуется:

$$\overset{\bullet}{\bullet}\circ \to {}^{\circ}{}_{\circ}{}^{\circ}.$$

Динамический каплинг устраняет эти проблемы. Еще одно важное его достоинство — расстояние между элементами пары конечно.

Определение 11. *Динамический каплинг* процессов xt, yt — это последовательное спаривание близких частиц из разных процессов. Такое спаривание должно удовлетворять трем условиям:

(I) при $t = 0$ все частицы неспарены. Скорости частиц в паре равны;

(II) пара создается навсегда. Частицы пары могут меняться;

(III) частица спаривается с одной из обгоняемых частиц.

Определение 12. Неспаренные частицы для краткости называются, в зависимости от их процесса xt или yt, *x- и y-дефектами*.

Плотность x-дефектов на отрезке I обозначим через $\rho u(x, I)$, а супремум этих величин для любой последовательности вложенных отрезков In с $\lim\limits_{n\to\infty}|I_n| = \infty$ — через $\rho u(x)$.

Определение 13. *Почти удачный динамический каплинг (ПУДК)* марковских процессов xt, yt почти всегда имеет $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_u(x) = 0$.

Лемма 4. Предположим, что: 1) $x, y \in X$ при $\rho(x) = \rho(y) > 0$; 2) существует ПУДК (x^t, y^t); 3) расстояния между взаимно спаренными частицами равномерно ограничены сверху величиной $\gamma(t) = o(t)$. В этом случае

$$\lim_{t\to\infty}\left|V(x,0,t) - V(y,0,t)\right| = 0.$$

Обозначим разность $W_{ij}^t = x_i^t - y_j^t$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}_0$.

Лемма 5. Рассмотрим ДГ (xt, yt). Супремум абсолютной величины $\left|W_{ij}^t\right|$ по всем взаимно спаренным частицам равномерно ограничен величиной v $\forall t \in \mathbb{Z}_0$.

Лемма 6. Имеется ПУДК, если: 1) $\rho(x) = \rho(y)$; 2) $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ $\exists \boldsymbol{t_{ij}} < \infty$ $\forall t \geqslant \boldsymbol{t_{ij}}$ $x_i^t > y_j^t$.

2.3. Эргодические свойства. Рассмотрим в непрерывном пространстве эргодические свойства процессов с запретами.

Теорема 2. Множество $\lim\limits_{t\to\infty}\{V(x,t)\}$, $t \in \mathbb{Z}_0$, зависит только от $\rho(x)$, если $\rho(x)$ существует.

Доказательство. Пусть имеются допустимые конфигурации xt, yt с одной плотностью $\rho > 0$. Возможны два случая.

1. Есть ПУДК с начальными условиями x, y. Тогда выполнены условия леммы 4 по лемме 5:

$$\lim_{t\to\infty}\left|V(x,0,t) - V(y,0,t)\right| = 0.$$

Окончательно теорему доказывает использование леммы 3.

2. Нет ПУДК. Тогда разность

$$V(x,i,t) - V(y,j,t) = \frac{W_{ij}^t}{t} - \frac{W_{ij}^0}{t}.$$

Замечаем, что достаточно изучить случай $i = j = 0$, поскольку, по лемме 3, в одной конфигурации средние скорости частиц стремятся друг к другу. Существуют три варианта для разности W_{00}^t:

1) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{W_{00}^t}{t} = 0$, $\left|V(x,0,t) - V(y,0,t)\right| \leqslant \frac{\left|W_{00}^t\right|}{t} + \frac{\left|W_{00}^0\right|}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$,

и средние скорости совпадают по следствию 1;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\frac{W_{00}^t}{t} > 0$.

Тогда $\forall i \in \mathbb{Z}$ и $\forall j$ такого, что $x_i^0 < y_j^0$, со временем $x_i^t > y_j^t$. Отсюда, одинаковой плотности $\rho > 0$ и леммы 6 имеем ПУДК, что противоречит условию;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\frac{W_{00}^t}{t} < 0$. Обменом процессов x_t, y_t получаем 2).

Итак, истинно только 1). □

Определение 14. *Детерминированной моделью* называется случай с детерминированными скоростями:

$\forall i \in \mathbb{Z}$ $\forall t \in \mathbb{Z}_0$ $v_i^t \equiv v$.

Теорема 3 (фундаментальная диаграмма). В детерминированной модели

$$V(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\min\left(\frac{1}{\rho}, v_0^s\right) = \begin{cases} v, \textit{ если } \rho(x) \leqslant \dfrac{1}{v}, \\ \dfrac{1}{\rho(x)} \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Идея доказательства. 1. Для каждого ρ конструируем семейство $x\rho$, которое инвариантно для динамики. 2. $\forall x \in x_\rho$ вычисляем скорость частиц, которая постоянна. 3. Используем теорему 2 о том, что равных плотностях средние скорости равны. □

Заключение

Рассмотрен полный комплект из четырех эргодических свойств: аналог вероятностного закона больших чисел, который в данном случае означает, что динамический процесс, обладающий этим свойством, представляет из себя некоторый неразложимый и неупрощаемый монолит; свойство перемешивания, благодаря которому динамический процесс «размазывается» по всему пространству и может служить одной из причин установления равновесного состояния; ЦПТ «делает» независимыми части динамического процесс; наконец, экспоненциальное убывание корреляций говорит все о том же: что по мере развития динамического процесса разнообразие уменьшается. Исследуя в дальнейшем процессы с запретами, находим в них аналогичные эргодические свойства, связанные с зависимостью параметров процесса от его средних, приводящих к усилению однообразия.

Чтобы достаточно легко получить эргодические свойств динамических процессов с запретами, было введено и достаточно подробно рассмотрено понятие динамического каплинга. Для этого процессы с запретами были смоделированы с помощью одномерных частиц-шаров и на этой модели введены понятия плотности и скорости вместе с их усреднениями. После этого на полученных объектах была смоделирована динамика эволюции перемещения частиц и получены марковские процессы. Затем введено понятие динамического каплинга для двух марковских процессов. Показано преимущество динамического каплинга перед обычным равным каплингом. Наконец, получены достаточно элементарные следствия, которые и были использованы для доказательства эргодичестких свойств динамических процессов с запретами, в том числе фундаментальной диаграммы. Построенная математическая модель процессов с запретами может быть широко использована на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мациевский С. В., Дроздецкий С. А., Тарновский П. В. и др. Об эргодичности в моделировании транспортных потоков крупного города // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия «Естественные и технические науки».—2019. -№ 4. -С.70–75
2. Радута В. П., Викторов А. А., Гарибьянц А. А. Дискретно-собы тийное моделирование транспортных потоков крупного города // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия «Естественные и технические науки».—2017. -№ 12. -С. 66–70.
3. Радута В. П., Викторов А. А., Гарибьянц А. А. Имитационное моделирование процессов развития транспортных сетей в условиях дефицита информации // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия «Естественные и технические науки».—2018. -№ 5. -С. 127–131.
4. Asymmetric simple exclusion process // Wikipedia. The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Asymmetric_simple_exclusion_process
5. Spitzer F. Interaction of Markov Processes // Advances in Mathematics. 1970. Vol. 5 (2). P. 246–290. doi:10.1016/0001–8708(70)90034–4.
6. Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. М.: МЦНМО, 2013. ISBN978–5–4439–0040–7.
7. Blank M. Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum // J. Stat. Phys. 2010. Vol. 140, № 1. P. 170–197. arXiv: 0904.4585 math.DS.
8. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1973.
9. Sinai Ya. G. Introduction to ergodic theory. Translated by V. Scheffer. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1976. ISBN0–691–08182–4.
10. Chacon R. V. Introduction to ergodic theory, by Ya. G. Sinai, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1977, 144 pp., $6.00 // Bulletin of the American Mathematical Society. 1978. Vol. 84, N. 4.
11. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. 2-е изд. М.: ФАЗИС, 1996. ISBN5–7036–0022–7.
12. Случайный процесс // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Случайный_процесс
13. Марковский процесс // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Марковский_процесс