

# ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

## DISCRETE SYMMETRIES AND SOLUTIONS IN QUADRATURES FOR SOME HYDRODYNAMIC MODEL

Z. Khakimova

*Summary.* A non-linear second-order ordinary differential equation with a polynomial right-hand side is considered, which arises when solving the system of hydrodynamic equations for an ideal self-gravitating non-relativistic fluid with zero pressure.

For the differential equation under consideration, a discrete transformation pseudogroup of the 24th order is found and the graph of this pseudogroup is constructed.

By the «reproduction» method, 23 equations of polynomial and fractional-polynomial form were obtained that are integrable in quadratures, just like the original equation.

*Keywords:* ordinary differential equation (ODE) of the 2nd order, polynomial ODE, fractional-polynomial ODE, discrete transformation group, transformation pseudogroup, dihedral group, exact solution of a differential equation.

**Хакимова Зилия Наильевна**

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского  
vka@mil.ru

*Аннотация.* Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка с полиномиальной правой частью, возникающее при решении системы уравнений гидродинамики идеальной самогравитирующей нерелятивистской жидкости с нулевым давлением.

Для рассматриваемого дифференциального уравнения найдена дискретная псевдогруппа преобразований 24-го порядка и построен граф этой псевдогруппы.

Методом «размножения» были получены ещё 23 уравнения полиномиального и дробно-полиномиального вида, интегрируемые в квадратурах, так же как и исходное уравнение.

*Ключевые слова:* обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, ОДУ полиномиального вида, ОДУ дробно-полиномиального вида, дискретная группа преобразований, псевдогруппа преобразований, группа диэдра, точное решение дифференциального уравнения.

## Введение

**П**оиск точных решений уравнений — одна из главных задач теории дифференциальных уравнений. Разработанный В.Ф. Зайцевым [1] в конце 20-го века дискретно-групповой анализ ОДУ, позволил найти точные решения сотен и тысяч уравнений [2], тогда как до этого в справочниках, в частности в [3], зачастую содержались решения лишь единичных уравнений тех же классов уравнений.

Разрабатывая методы поиска решения уравнений, одновременно сложно следить за тем, чтобы хотя бы часть из них имела приложения.

В данной статье удалось совместить обе задачи: ищутся симметрии и точные решения уравнений с полиномиальными и дробно-полиномиальными правыми частями, и при этом как минимум исходное уравнение имеет физический смысл, так как оно возникло при исследовании модели «Ньютоновская космология» [4],

которая является базисной при изучении крупномасштабной структуры Вселенной [5, 6].

## Используемые методы исследования

В работе использовались методы дискретно-группового анализа дифференциальных уравнений: методы нахождения преобразований, замкнутых в рассматриваемых классах уравнений, построения дискретных групп, псевдогрупп и их графов, метод «размножения» интегрируемых случаев в исследуемых классах уравнений с полиномиальными и дробно-полиномиальными правыми частями.

## Исследуемые классы уравнений

В статье рассматриваются уравнения, принадлежащие классу ОДУ с полиномиальными правыми частями:

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}, \quad (1)$$

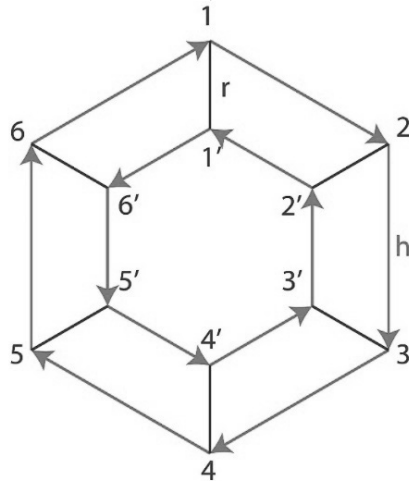


Рис. 1. Граф группы  $D_6$ .

с дробно-полиномиальными правыми частями:

$$y''_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum_{i=3}^4 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}} \quad (2)$$

а также подкласс класса уравнений (2):

$$y''_{xx} = \left[ \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i} \right]^{-1} \quad (3)$$

Обозначим эти классы уравнений с помощью сумм векторов параметров соответственно:

$$\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i), \quad \frac{\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}{\sum_{i=3}^4 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}, \quad \left[ \sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i) \right]^{-1} \quad (4)$$

Рассмотрим ОДУ 2-го порядка с полиномиальной правой частью:

$$y''_{xx} = -5yy'_x - 3y^3, \quad (5)$$

которое, в соответствии с (4), обозначим

$$(0, 1, 1, 0 | -5) + (0, 3, 0, 0 | -3). \quad (6)$$

**Замечание 1.** В таблицах для удобства будем обозначать сумму векторов матрицей, например вместо (6):

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right].$$

Уравнение (5) возникло в гидродинамике [4] при реализации для «Ньютоновской космологии» программы подмодели, подобной программе Л.В. Овсянникова в области газодинамики [7]. В уравнении (5) независимая переменная  $x$  — это время, а  $y(x)$  — функция, возникающая при поиске инвариантного решения системы уравнений, соответствующей указанной выше подмодели.

**Замечание 2.** Кроме того, уравнение (5) является частным случаем уравнения нелинейных колебаний.

Уравнение (5) принадлежит классу полиномиальных уравнений (1), а также более общему классу дробно-полиномиальных уравнений (2).

Дискретная группа преобразований диэдра

В работе [8] были найдены преобразования  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{h}$ , замкнутые в классе уравнений (2):

$$\mathbf{r}: \quad x = u, \quad y = t,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}{\sum_{i=3}^4 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)} \xrightarrow{\mathbf{r}} \frac{\sum_{i=1}^2 (l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i | (-1)^{-n_i-1} A_i)}{\sum_{i=3}^4 (l_i, k_i, -m_i - n_i, n_i | (-1)^{-n_i} A_i)}; \quad (7)$$

$$\mathbf{h}: \quad x = \frac{1}{\dot{u}_t}, \quad y = -\frac{t\dot{u}_t - u}{\dot{u}_t},$$

Таблица 1. Уравнения-вершины графа на рис. 1 (вершина 1 соответствует уравнению (5)).

1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 &   & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 &   & -3 \end{bmatrix}$	1'	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 &   & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 0 &   & 3 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 1 &   & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 &   & -3 \end{bmatrix}^{-1}$	2'	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 &   & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 &   & -3 \end{bmatrix}^{-1}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 &   & -5 \\ 3 & -6 & 3 & 0 &   & 3 \end{bmatrix}$	3'	$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 &   & -5 \\ -6 & 3 & 0 & 0 &   & -3 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 &   & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -6 &   & -3 \end{bmatrix}^{-1}$	4'	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 &   & -5 \\ 3 & 0 & 3 & -6 &   & 3 \end{bmatrix}^{-1}$
5	$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 &   & -5 \\ -6 & 0 & 0 & 3 &   & -3 \end{bmatrix}$	5'	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 &   & 5 \\ 0 & -6 & 0 & 3 &   & -3 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 &   & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 0 &   & 3 \end{bmatrix}^{-1}$	6'	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 &   & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 0 &   & -3 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\frac{\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}{\sum_{i=3}^4 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)} \xrightarrow{\mathbf{h}} \frac{\sum_{i=3}^4 (n_i, m_i, -k_i - l_i, l_i | (-1)^{l_i} A_i)}{\sum_{i=1}^2 (n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i | (-1)^{l_i - 1} A_i)}; \quad (8)$$

Преобразования  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{h}$  в (7) и (8) являются образующими дискретной группы преобразований диэдра 12-го порядка:

$$D_6 = \{\mathbf{E}, \mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3, \mathbf{h}^4, \mathbf{h}^5, \mathbf{r}, \mathbf{hr}, \mathbf{h}^2\mathbf{r}, \mathbf{h}^3\mathbf{r}, \mathbf{h}^4\mathbf{r}, \mathbf{h}^5\mathbf{r}\}, \quad 2 \quad 6$$

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^6 = (\mathbf{hr})^2 = \mathbf{E}.$$

Таким образом, все преобразования (9) замкнуты в классе уравнений (2).

Граф группы  $D_6$  изображён на рис. 1.

Вершины графа на рис. 1 — это полиномиальные и дробно-полиномиальные уравнения, принадлежащие классам уравнений (1) и (3) (вершина 1 соответствует классу уравнений (1)) [8]. Дуги графа — это преобразования группы  $D_6$  (9).

Поскольку изучаемое уравнение (5) принадлежит классу уравнений (1), то, применив к нему преобразования группы  $D_6$ , получаем уравнения-вершины графа; запишем их в таблицу 1.

### Псевдогруппа преобразований

В работе [9] автором исследовался подкласс класса полиномиальных уравнений (1) при  $n_1 = n_2 = 0$ :

$$(k_1, l_1, m_1, 0 | A_1) + (k_2, l_2, m_2, 0 | A_2). \quad (10)$$

В частности, было найдено преобразование Беклунда  $\mathbf{g}_2$ , замкнутое в классе уравнений (10):

$$\mathbf{g}_2: \quad x = u^{k+1}, \quad y = (\dot{u}_t)^{\frac{1}{l_2}}, \quad y'_x = \frac{A_2}{k+1}t + \frac{A_1}{l_1+1}(\dot{u}_t)^{\frac{l_1+1}{l_2}},$$

$$(0, l_1, 1, 0 | A_1) + (k, l_2, 0, 0 | A_2) \xrightarrow{\mathbf{g}_2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathbf{g}_2} \left( 0, -\frac{k}{k+1}, \frac{2l_2 - l_1}{l_2}, 0 \mid -\frac{l_2}{(k+1)(l_1+1)} \right) +$$

$$+ \left( 1, -\frac{k}{k+1}, \frac{2l_2+1}{l_2}, 0 \mid -\frac{l_2}{(k+1)^2} A_2 \right).$$

Легко видеть, что уравнение (5) принадлежит исходному классу уравнений в (11) при  $k=0, l_1=1, l_2=3, A_1=-5, A_2=-3$ . Применив преобразование  $\mathbf{g}_2$ :

$$\mathbf{g}_2: \quad x = u, \quad y = (\dot{u}_t)^{\frac{1}{3}}, \quad y'_x = -3t - \frac{5}{2}(\dot{u}_t)^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

Таблица 2. Уравнения орбиты уравнения (13) (вершина 1.1 соответствует уравнению (13)).

1.1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 &   & \frac{15}{2} \\ 1 & 0 & \frac{7}{3} & 0 &   & 9 \end{bmatrix}$	1.1'	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 &   & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 &   & -9 \end{bmatrix}$
1.2	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & -3 & 0 &   & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{7}{3} & -4 & 0 &   & -9 \end{bmatrix}^{-1}$	1.2'	$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 &   & \frac{15}{2} \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 & 0 &   & 9 \end{bmatrix}^{-1}$
1.3	$\begin{bmatrix} 0 & -3 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} &   & (-1)^{\frac{1}{3}}\frac{15}{2} \\ 0 & -4 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} &   & (-1)^{\frac{1}{3}}9 \end{bmatrix}$	1.3'	$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & \frac{5}{3} &   & -\frac{15}{2} \\ -4 & 0 & 0 & \frac{7}{3} &   & -9 \end{bmatrix}$
1.4	$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 & -3 &   & (-1)^{\frac{1}{3}}\frac{15}{2} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -4 &   & -9 \end{bmatrix}^{-1}$	1.4'	$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & -3 &   & (-1)^{\frac{1}{3}}\frac{15}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 & -4 &   & (-1)^{\frac{1}{3}}9 \end{bmatrix}^{-1}$
1.5	$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & \frac{4}{3} &   & \frac{15}{2} \\ -4 & 1 & 0 & \frac{2}{3} &   & -9 \end{bmatrix}$	1.5'	$\begin{bmatrix} 0 & -3 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} &   & (-1)^{\frac{1}{3}}\frac{15}{2} \\ 1 & -4 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} &   & -9 \end{bmatrix}$
1.6	$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 &   & -\frac{15}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 &   & -9 \end{bmatrix}^{-1}$	1.6'	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3} & -3 & 0 &   & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -4 & 1 &   & -9 \end{bmatrix}^{-1}$

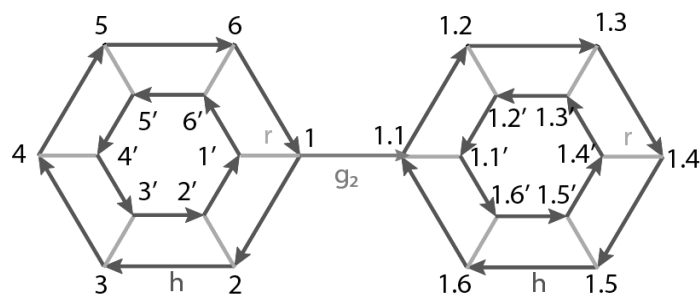


Рис. 2. Граф псевдогруппы 24-го порядка.

к уравнению (6) (или (5), что то же самое):

$$(0, 1, 1, 0 | -5) + (0, 3, 0, 0 | -3), \tag{6}$$

получаем уравнение также полиномиального вида:

$$\left(0, 0, \frac{5}{3}, 0 \mid \frac{15}{2}\right) + \left(1, 0, \frac{7}{3}, 0 \mid 9\right). \tag{13}$$

Применим к уравнению (13) группу преобразований (9); полученные уравнения поместим в таблицу 2.

Общий граф, состоящий из двух графов группы  $D_6$ , соединённых дугой-преобразованием  $g_2$ , изображён на рис. 2. Это граф псевдогруппы 24-го порядка.

Решения всех уравнений-вершин графа 24-го порядка

Уравнение

$$y''_{xx} = -5yy'_x - 3y^3 \quad (5)$$

является автономным.

«Понижающее» преобразование

$$y'_x = V(y) \quad (14)$$

приводит (5) к уравнению Абеля 2-го рода:

$$VV'_y + 5yV = -3y^3. \quad (15)$$

Подставив в (15)

$$t = -\frac{5}{2}y^2, \quad (16)$$

получаем каноническое уравнение Абеля 2-го рода:

$$VV'_t - V = -\frac{6}{25}t, \quad (17)$$

которое имеет общее решение в квадратурах в параметрическом виде, где  $\tau$  — параметр [1, 2]:

$$t = C_1 E, \quad V = \tau C_1 E, \quad (18)$$

где

$$E = e^{-I}, \quad I = \int \frac{\tau d\tau}{\tau^2 - \tau + \frac{6}{25}}. \quad (19)$$

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$  по формулам (14) и (16), получаем общее решение уравнения (5) в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{5C_1\tau} E^{\frac{1}{2}} + C_2, \\ y &= C_1 E^{\frac{1}{2}} \left( y'_x = \frac{5C_1^2}{2} \frac{\tau^3}{\tau^2 - \tau + \frac{12}{25}} E \right) \end{aligned} \quad (20)$$

( $E$  указано в (19)).

Уравнение (13) приводится к (5) обратным преобразованием:

$$\mathbf{g}_2^{-1}: \quad x \rightarrow -\frac{1}{3}y'_x - \frac{5}{6}y^2, \quad y \rightarrow x, \quad y'_x \rightarrow y^{-3}. \quad (21)$$

Композиция преобразования (21) и решения (20) является общим решением уравнения (13):

$$x = -\frac{5C_1^2}{6} \frac{\tau^3 - \tau^2 + 2\tau - \frac{12}{25}}{\tau^2 - 2\tau + \frac{12}{25}} E, \quad y = \frac{2}{5C_1\tau} E^{\frac{1}{2}} + C_2 \quad (22)$$

(см.  $E$  в (19)).

Выберем уравнения-вершины 1 и 1.1 ((5) и (13)) в качестве ключевых на рис. 2. Они связаны с остальными 11-ю уравнениями-вершинами 6-угольных призм преобразованиями группы  $D_6$  (9). Этими же преобразованиями связаны и решения уравнений.

В работе [8], на примере орбиты 1-го уравнения Пенлеве, показан экономичный способ получения решений уравнений 2-6' и 1.2-1.6' через решения ключевых уравнений 1 и 1.1 соответственно.

Заключение

В данной работе решены следующие задачи.

1. Найдены преобразования уравнения (5), замкнутые в классах уравнений (1) и (2).
2. Построены дискретная группа диэдра и псевдогруппа преобразований для уравнения (5) и изображены их графы (рис. 1 и 2).
3. Записаны все уравнения, принадлежащие орбите уравнения (5), соответствующие вершинам графа на рис. 2 (см. таблицы 1,2).
4. Приведены решения «ключевых» уравнений (5) и (13) в квадратурах (см. (20), (22)).
5. Указан способ нахождения точных решений всех уравнений таблиц 1 и 2 (в таблицах 1, 2 всего 24 уравнения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин — М.: Наука, 1993. — 464 с.
2. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p. DOI: 10.1201/9781315117638
3. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen / E. Kamke. — B.G. Teubner, Leipzig, 1977. — 246 p. DOI:10.1007/978-3-663-12057-5
4. Клебанов И.И. Групповой анализ модели «Ньютоновская космология» / И.И. Клебанов, О.В. Старцун, С.А. Иванов // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2015». — СПб.: РГПУ, 2017. — С. 33–36.

5. Гурбатов С.Н. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания [Электронный ресурс] / С.Н. Гурбатов, А.И. Сачив, С.Ф. Шандрин // Успехи физических наук. — 2012. — N182. — С. 233–261. — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/2012/3/b/> (дата обращения: 17.12.2022)
6. Вайнберг С. Космология / С. Вайнберг — М.: УРСС, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 608 с.
7. Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика / Л.В. Овсянников // Прикладная механика и математика, РАН. — 1994. — N4 (58). — С. 30–55.
8. Хакимова З.Н. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — N1(4). — С. 61–92. — URL: <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4> (дата обращения: 17.12.2022)
9. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Точные решения уравнений / В.Ф. Зайцев, А.В. Флегонтов, З.Н. Хакимова. — Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, 1989. — № 105. — 61с.

---

© Хакимова Зиля Наильевна (vka@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»