DOI 10.37882/2223–2966.2021.02.26

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАГРУЖЕНИИ ДВУХФАЗНОГО ОСНОВАНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ON THE CONVERGENCE OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF LOADING A TWO-PHASE BASE BY THE FINITE ELEMENT METHOD

T. Saltanova

Summary. The article considers a model describing the stress-strain state of a two-phase body. A mathematical model is a system of partial differential equations that has no analytical solution. A numerical solution method is proposed, its convergence is shown, and the numerical solution is analyzed with a full-scale experiment.

Keywords: model of the stress-strain state of a two-phase body, convergence of the method, finite element method, stiffness matrix of a two-phase element, Hooke's law, Fleman's problem, numerical experiment.

Салтанова Татьяна Викторовна
Доцент, Тюменский государственный университет
tsaltanova@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрена модель, описывающая напряжённо–деформированного состояния двухфазного тела. Математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая не имеет аналитического решения. Предложен численный метод решения, показана его сходимость, а также проведён анализ численного решения с натурным экспериментом.

Ключевые слова: модель напряжённо-деформированного состояния двухфазного тела, сходимость метода, метод конечных элементов, матрица жёсткости двухфазного элемента, закон Гука, задача Фламана, численный эксперимент.

Введение

В работе использована модель напряжённо–деформированного состояния двухфазного тела (скелет грунта + поровая вода). Данная модель описывает стабилизированное состояние двухфазного грунта после окончания процесса консолидации. Согласно, рассматриваемой модели, остаточное поровое давление отлично от нуля, что подтверждается натурными и лабораторными экспериментами [1]. Для этой модели разработана модификация метода конечных элементов и на задаче типа Фламана показаны результаты численного моделирования. Сформулировано предложение и показана сходимость решения, полученного по МКЭ к аналитическому решению. Результаты численных расчётов сопоставлены с аналитическим решением.

Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу о загружении внешней нагрузкой водонасыщенного основания с учётом избыточных остаточных поровых давлений.

$$-\left(\left((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+G\Delta u_i+b_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}+c_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right)=F_i\,,\quad i=1,2\,, \tag{1}$$

$$G=\frac{E_s}{2(1+v)},\ \lambda=\frac{E_s v}{(1+v)(1-2v)},\ b_i=\frac{E_i^l}{\aleph_i^2},\ c_i=\frac{E_i^l}{\aleph_i h_i},$$
$$\theta=div\,u$$

с неоднородными смешанными граничными условиями: на одной части границы S_2 записываются статические граничные условия, а на другой S_1 — кинематические:

$$u\,\big|_{S_1}=0\,,\ t^{(v)}\,\big|_{S_2}=q(x_1,x_2), \tag{2}$$

$$t^{(v)}=\sum_{i,k=1}^{2}\left(\sigma_{ik}+b_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)cos(v,x_k)e_i=$$

$$=\sum_{i,k=1,k\neq i}^{2}((2G+b_i)\varepsilon_i+\lambda\varepsilon_{ik}+\sigma_{ik})cos(v,x_k)e_i\,.$$

$\boldsymbol{v}$ — внешняя нормаль к поверхности $S=S_1+S_2$. Касательные напряжения по модели действуют только в скелете грунта, $q(x_1,x_2)$ — вектор функция, имеющая конечную норму.

Введем три дифференциальных вектора-оператора на линеале M функций $\boldsymbol{u}$, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми частными производными в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющих условиям (2), (множество M плотно в $L_2(\Omega)$):

а) дифференциальный вектор-оператор теории упругости или оператор Ламе, записанный для изотропного варианта закона Гука

$$A = (G + \lambda) graddiv + G\Delta;$$

б) дифференциальный вектор-оператор второго порядка

$$B = \left(b_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad b_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad b_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right),$$

который описывает изменение коэффициентов Ламе на величины b_i, вызванное влиянием поровой воды на скелет грунта;

в) дифференциальный вектор-оператор первого порядка

$$C = \left(c_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad c_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad c_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

моделирующий разгружающее влияние жидкой фазы и несимметричен.

Запишем уравнения (1) в операторном виде:

$$Du = F,\ D = -(A + B + C),\ u = (u_1, u_2),$$

$$F = (F_1, F_2), \tag{3}$$

где F — заданная вектор функция, имеющая конечную норму.

Краевые условия, которым обязательно удовлетворяют функции из области определения оператора и необязательно — функции из пространства $W^{1,2}$ называются естественными для дифференциального оператора $\boldsymbol{D}$. В работе [5] показано, что он является положительно определенным.

Обобщенным решением краевой задачи назовем функцию $u \in V$ такую, что согласно принципу Лагранжа ($\boldsymbol{v}$ — возможное перемещение)

$$(Du, v) = (F, v),\ \forall v \in V,\ F \in L_2(\Omega),$$

$$(F, v) \in V^*,\ V = \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega).$$

После интегрирования по частям получаем (форма Галеркина)

$$a(u,v) + c(u,v) = (F,v) + \int_{S_2} v \cdot t^{(v)}(u) dS, \tag{4}$$

где

$$a(u,v) + c(u,v) = (F,v) + \int_{S_2} v \cdot t^{(v)}(u) dS,$$

$$c(u,v) = -\int_{\Omega} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_i dx.$$

Требование обращения в нуль v на части границы указывается как

$$v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega).$$

Пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ — пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{1,2} = \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пространство V^* сопряженное к V.

Пусть V — гильбертово пространство, $b(u,v)$ — коэрцитивная непрерывная билинейная форма на $V \times V$:

$$b(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V \tag{5}$$

и l — линейная непрерывная форма на V. Обозначим через $\boldsymbol{u}$, единственное решение в V уравнения

$$b(u,v) = \langle l, v \rangle \qquad \forall v \in V \tag{6}$$

Необходимо аппроксимировать этот элемент $\boldsymbol{u}$, зададим какую — либо внешнюю устойчивую и сходящуюся аппроксимацию пространства V, т.е. $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in N}$. V_h — возрастающая последовательность конечномерных подпространств V, объединение которых плотно в V, $p_h : V_h \to L_2(\Omega)$ — оператор продолжения, $r_h : V \to V_h$ — оператор сужения. Для каждого $h \in N$ зададим также непрерывную билинейную форму $b_h(u_h, v_h)$ на $V_h \times V_h$, которая коэрцитивна, и удовлетворяет условию:

$\exists \alpha_0 > 0$, не зависящее от h, такое что

$$b_h(u_h, u_h) \geq \alpha_0 \|u_h\|_h^2 \qquad \forall u_h \in V_h \tag{7}$$

где непрерывную линейную форму l_h на V_h, такую что

$$\|l_h\|_{*h} \leq \beta,\ \beta \text{ не зависит от } h. \tag{8}$$

Для фиксированного h найдём $u_h \in V_h$ такое что

$$b_h(u_h, v_h) = \langle l_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \tag{9}$$

Примем следующие предложения о согласованности:

Если семейство v_h слабо сходится к v при $h \to 0$ и если семейство w_h сильно сходится к w при $h \to 0$, то

$$\lim_{h\to 0} b_h(v_h, w_h) = b(v,w)$$
$$\lim_{h\to 0} b_h(w_h, v_h) = b(w,v) \qquad (10)$$

Если семейство v_h слабо сходится к v при $h \to 0$, то

$$\lim_{h\to 0}\langle l_h, v_h\rangle = \langle l, v\rangle \qquad (11)$$

Теорема. При выполнении предположений (5), (7), (8) (10), и (11) решение u_h уравнения (9) сильно сходится к решению $\boldsymbol{u}$ уравнения (6) при $h \to 0$.[6]

Данную теорему используем ниже.

Пусть Ω — открытая ограниченная область в R^2. Через $\Im_h$ будем обозначать регулярную триангуляцию Ω, т.е. семейство двумерных симплексов удовлетворяющих условию

$$\sigma(h) \le \alpha, \ \ при \quad \rho(h) \to 0, \qquad (12)$$

где

$$\rho(h) = \sup_{J\in\Im_h} \rho_J, \ \rho^{/}(h) = \inf_{J\in\Im_h} \rho_J^{/}, \ \sigma(h) = \sup_{J\in\Im_h}\left(\rho_J/\rho_J^{/}\right).$$

где $\rho = \rho_J$ — диаметр наименьшего шара, содержащего J (двумерный симплекс, в частности треугольник, прямоугольник), а $\rho^{/} = \rho_J^{/}$ — диаметр наибольшего шара содержащегося в J.

Сформулируем следующее предложение.

Предложение. Если $\rho(h) \to 0$ и $\sigma(h) \le \alpha$, то решение u_h задачи (2.9) сходится к решению $\boldsymbol{u}$ задачи (2.6).

Доказательство.

Форма $d(u,v) = a(u,v) + c(u,v)$ в ограниченной области V является коэрцитивной, билинейной непрерывной []:

$$d(u,u) \ge \gamma^2 \|u\|_V^2,$$

обладающая условием не симметрии,

$$c(u,v) = -c(v,u) - \int_{S_2} c_i u_i^2 v_i^2 \cos(v,x)dx \quad \forall u,v \in V.$$

Обозначим в (9)

$$b_h(u_h, v_h) = d(u_h, v_h), \ \langle l_h, v_h\rangle = (F, v_h) + \int_{S_2} v_h \cdot q dS.$$

Тогда условия теоремы сходимости (2.5), (2.7), (2.8) (2.10), и (2.11) выполняются, что и доказывает предложение. □

Таким образом мы показали сходимость решения получаемого по МКЭ к решению исходной задачи.

Модификация метода конечных элементов

Перепишем систему уравнений (1) в операторном виде и скалярно умножим уравнение на вектор возможных перемещений V:

$$-((A+B+C)u,v) = (F,v), \qquad (13)$$

Отрицательные операторы A, B, C являются положительно определёнными [2].

Закона Гука для скелета грунта в рассматриваемой модели имеет вид:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E_{l1}}{\aleph_1^2} & \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E_{l2}}{\aleph_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}, \qquad (14)$$

Фигурными скобками обозначен вектор — столбец, квадратными скобками — полная матрица.

Искомыми величинами являются узловые перемещения $\{\delta\}$, поэтому перемещения u_k и другие характеристики внутри элемента записываются через искомые узловые перемещения:

$$u_k = \frac{1}{2\Delta}\Big[(p_i + d_i x_1 + n_i x_2)u_k^i + (p_j + d_j x_1 + n_j x_2)u_k^j +$$
$$+ (p_m + d_m x_1 + n_m x_2)u_k^m\Big], \ k = 1,2 \qquad (15)$$

$$p_i = x_1^j x_2^m - x_1^m x_2^j, \ n_i = x_1^m - x_2^j, \ d_i = x_2^j - x_2^m.$$

На основании уравнений Коши относительные деформации внутри конечного элемента площадью Δ выражаются через искомые узловые перемещения $\{\delta\}$:

$$\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\}, \ \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix}.$$

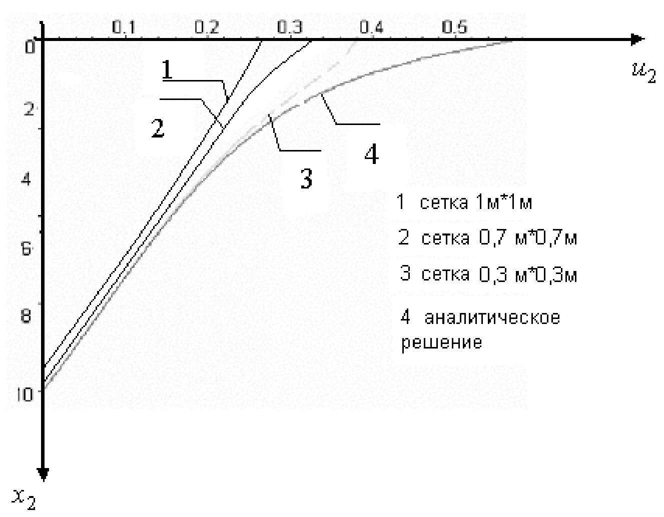

Рис. 1. Вертикальные перемещения для сечения $x_1 = 0$.

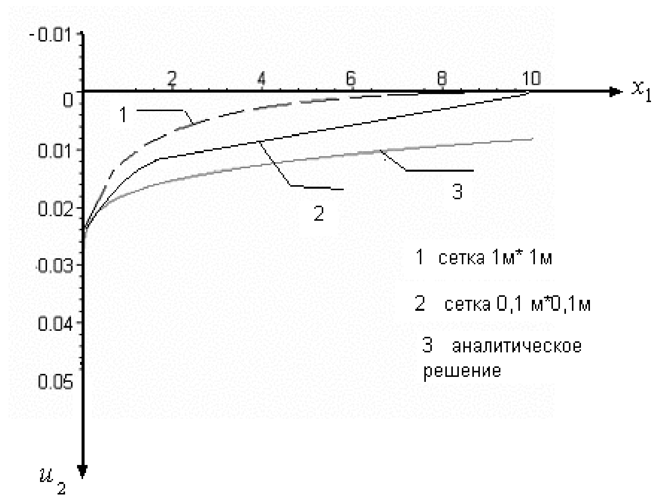

Рис. 2. Вертикальные перемещения дневной поверхности.

Для составления системы линейных алгебраических уравнений используем первые два слагаемые выражения (13) $(-(A+B)u,v)$. Пусть вектор V описывает возможные узловые перемещения $\{\delta^*\}$. Допустим, что возможные перемещения совпадают с искомыми перемещениями $\{\delta\}$.

Запишем работу внешних сил $\{\delta\}^T[F]$ через удельную работу внутренних сил

$$2(W^A + W^B) = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\},\ \{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T[N]^T,$$

отвечающих скелету грунта.

От удельной работы перейдём к работе внутренних сил в пределах объёма элемента единичной толщины.

$$\int_S \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot 1dS = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot\Delta\cdot 1,\ \int_S dS = \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix},$$

Уравнение равенства работ внешних и внутренних сил запишем с помощью матриц: $\Delta\cdot\{\delta\}^T[N]^T\{\sigma\} = \{\delta\}^T\{F\}$. Сократим на $\{\delta\}^T$. Тогда выражение $-((A+B)u,u) = (F,u)$ получит матричную запись:

$$\Delta\cdot[N]^T[D]\cdot[N]\{\delta\} = \{F\}.$$

Произведение

$$\Delta\cdot[N]^T[D]\cdot[N] = [k_s] \qquad (16)$$

называют матрицей жёсткости для скелета грунта.

После аналогичных преобразований для третьего слагаемого имеем:

$$(-Cu,u) = \{\delta\}^T[M]^T\{P_l\}^T\Delta. \qquad (17)$$

$$[M] = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} f_i & 0 & f_j & 0 & f_m & 0 \\ 0 & f_i & 0 & f_j & 0 & f_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$f_k = p_k + d_k x_c + n_k x_c$, x_c — центр тяжести треугольного элемента.

$$\{P_l\}^T = \begin{pmatrix} \frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1}\varepsilon_1 \\ \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2}\varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = [D_l]\{\varepsilon_s\}.$$

После подстановки полученных выражений в (17) получаем матрицу жёсткости для поровой воды:

$$[M]^T[D_l]\cdot[N]\Delta = [k_l].\ (18)$$

Поскольку матричный сомножитель $[N]$ в матрице $[k_l]$ сохраняется, то новое матричное слагаемое $[M]^T[D_l]$ надо сложить с известной для скелета грунта матрицей $[N]^T[D]$, что приведёт к новой матрице жёсткости для двухфазного треугольного элемента

$$[k_{sl}] = ([N]^T[D] + [M]^T[D_l])\cdot[N]\cdot\Delta.$$

Численные эксперименты

Приведём результаты решения задачи типа Фламана о загружении двухфазной полуплоскости. В работе [3] получена аналитическая формула для этой задачи, которая позволит проверить точность аппроксимации данного метода. Аналитическое решение задачи имеет вид:

$$u_{sr} = \frac{2F\left(1-\nu^2\right)\cos\theta}{\pi\left(E_s + \dfrac{E_l}{\aleph^2}\right)} \cdot e^{-a^2 r}\left[\ln\frac{R}{r} - \int_{\rho}^{r}\frac{e^{a^2 r}-1}{a^2 r}d\left(a^2 r\right)\right],$$

$$u_{s\theta} = \frac{2F\sin\theta}{\pi\left(E_s + \dfrac{E_l}{\aleph^2}\right)}\left(\nu(1+\nu) + \left(1-\nu(1+\nu)a^2 r\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, e^{-a^2 r}\left[\ln\frac{R}{a^2 r} - \int_{\rho}^{r}\frac{e^{a^2 r}-1}{a^2 r}d\left(a^2 r\right)\right]\right),$$

$$a^2 = \frac{E_l}{\left(E_s + \dfrac{E_l}{\aleph^2}\right)\cdot\aleph\cdot h}.$$

Так как задача решена в полярных координатах, то для вертикальных перемещений возьмём угол $\theta = 0$, а для горизонтальных

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Приведём графики вертикальных и горизонтальных перемещений в сравнении с аналитическим.

Параметры задачи взяты из лабораторных экспериментов [4]: $h = 10\,м$, $\aleph = 0{,}52$, $F = 0{,}077\,МПа$, $E_s = 8{,}1\,МПа$, $E_l = 0{,}4E_s$.

Как видно из графиков, изображённых на рисунках 1 и 2 аналитическое решение достаточно хорошо согласуется с решением полученным по методу конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бай В. Ф., Мальцева Т. В., Набоков А. В. Механические характеристики двухфазного грунта // Известия вузов. Нефть и газ. 2002, № 2 — С. 98–106.
2. Мальцева Т. В. Введение функционала для решения обобщённой системы уравнений Ляме// вестник Тюменского Государственного Университета. 2003, № 5.— С. 196–202.
3. Мальцева Т. В. Фундаментальное решение задачи Фламана для двухфазной вязкоупругой полуплоскости. // Известия вузов. Нефть и газ.— 2000.— № 2.— С. 72–78.
4. Мальцев Л. Е., Бай В. Ф., Мальцева Т. В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов.— С-Пб.: Стройиздат С-Пб., 2002.— 336 с.
5. Мальцева Т. В. Математическое моделирование напряжённо — деформированного состояния водонасыщенного грунта с позиций теории вязкоупругости: диссертация доктора. физико-матем. наук;.
6. Р. Темам. Уравнение Навье — Стокса теория и численный анализ.— М.: Мир.,1981.— 408с.

© Салтанова Татьяна Викторовна (tsaltanova@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»