DOI 10.37882/2223-2966.2023.10.17

# ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

## ITERATION ALGORITHM OF SOLUTION OF CONTACT PROBLEM

**A. Ketov**

*Summary*. The paper discusses the features of the algorithm of numerical solution of contact problems of solid mechanics in complex contact problems with local contact. The solution is constructed in the framework of discrete technology based on the new iterative algorithm. The method consists of iterating the power conditions on the contact surface. The stress-strain state of the tool joint is determined for the testing and for the experimental data.

*Keywords*: contact interaction, static nonsolution, iterative process, speed of solution.

***Кетов Антон Викторович***
*кандидат технических наук, доцент,*
*Дальневосточный Государственный Университет Путей Сообщения (г. Хабаровск)*
*antonk500255@rambler.ru*

*Аннотация*. В работе рассмотрены особенности алгоритма численного решения контактных задач механики деформируемого твёрдого тела в сложных контактных задачах с локальным контактом. Решение построено в рамках дискретной технологии на основе нового итерационного алгоритма. Метод состоит в итерационном выполнении на контактной поверхности силовых граничных условий. Проведёно определение напряжённо-деформированного состояния для тестирования и для экспериментальных данных.

*Ключевые слова*: контактное взаимодействие, статическая неопределимость, итерационный процесс, скорость решения.

### Введение

Аналитическое решение контактной задачи существует лишь для простейших случаев контакта двух деформируемых тел. В общем случае контактная задача является ***статически неопределимой***, причем ***степень неопределимости заранее неизвестна*** (заранее неизвестно число n и расположение контактирующих участков).

Условием, отражающим характер взаимодействия при контакте деформируемых тел, является ***совместность перемещений*** всех контактирующих точек их поверхностей под действием нагрузки. Это условие можно описать [1] в виде интегрального уравнения:

$$\iint_S q(u.v)K_\Sigma(u',v',u,v)\,dudv + \Delta(u',v') = \delta \qquad (1)$$

где $s$ — площадь контакта взаимодействующих тел; $q$ — контактное напряжение (давление); $u,v$ — текущие координаты точки приложения силы; $u',v'$ — текущие координаты точки измерения перемещений поверхностей тел; $K_\Sigma$ $(u',v',u,v)$ — функция влияния распределённых нагрузок на сумму перемещений поверхностей тел вследствие всех деформаций взаимодействующих тел; Δ — зазор между поверхностями взаимодействующих тел до нагружения; δ — сближение контактирующих тел, являющееся мерой их деформирования.

Кроме условия совместности перемещений, должны выполняться и условия равновесия сил, которые описываются [1] уравнением:

$$\iint_S q(u.v)\,dudv = F, \qquad (2)$$

где $F$ — внешняя сжимающая сила.

При решении системы из двух интегральных уравнений (1) и (2) можно найти, как распределяется нагрузка по площадкам контакта при контакте взаимодействующих тел. Для возможности получения такого решения ***при неизвестных заранее*** размерах, форме и числе площадок контакта между взаимодействующими телами эта система уравнений должна быть дополнена [1] ***краевыми (граничными) условиями***:

для всех точек на площадках контакта

$$q > 0,\ \Delta + W = \delta, \qquad (3)$$

на свободных (вне площадок контакта) поверхностях тел

$$q = 0,\ \Delta + W > \delta, \qquad (4)$$

где $q$ — контактное напряжение (давление); Δ — зазор между поверхностями контактирующих тел до нагружения; $W$ — сумма местных и общих деформаций поверхностей тел; δ — сближение контактирующих тел, являющееся мерой их деформирования.

### Обзор существующих решений

Дискретный численный итерационный метод решения ***прямой*** (при заданной величине внешней сжимающей силы $F$) контактной задачи был предложен К.И. Заблонским [2]. Система интегральных уравнений (1) и (2) сводится к системе ($n$ + 1) линейных алгебраических уравнений. Поскольку размеры площадок контакта и число $n$ участков, передающих нагрузку, заранее неизвестны, распределение нагрузки находится ***методом итераций*** путем многократного решения системы линейных уравнений с последовательным исключением участков, на которых нагрузка принимает отрицательные значения, и уточнением границ площадок контакта в ходе итераций [2]. Недостатки этого метода: 1) необходимо ***многократное решение*** системы линейных уравнений высокого порядка (на ***каждой*** итерации внешнего цикла); 2) метод применим только при ***линейной*** зависимости деформаций от сил.

Дискретный численный метод решения ***обратной*** (при заданном сближении δ контактирующих тел) контактной задачи предложен Г.И. Шевелевой [3]. Недостатки этого метода: 1) в проектном расчете (при заданной величине внешних сил) необходимо *неоднократно* (при нелинейной зависимости $\delta(F_n)$ не менее 3-х раз) решать ***обратную*** контактную задачу, что требует дополнительных неэффективных затрат машинного времени ЭВМ; 2) при ***аппроксимации*** зависимости $\delta(F_n)$ в расчёт вносятся ***дополнительные*** погрешности, уменьшить которые можно только за счёт дополнительных затрат машинного времени ЭВМ на дополнительные решения обратной контактной задачи в промежуточных точках для аппроксимации; 3) предложенный Г.И. Шевелевой вариант расчёта [3] учитывает ***только контактные*** деформации тел.

## Предлагаемое решение

Для решения дискретным методом разобьём площадку контакта, лежащую в общей касательной плоскости контактирующих поверхностей тел, на прямоугольные участки, в пределах которых контактная нагрузка будет считаться равномерно распределенной и равной её значению в центре каждого участка. Условия совместности перемещений должны будут выполняться в расчётных точках, расположенных в центрах участков. При этом система уравнений (1) и (2) сводится к системе ($n$ + 1) алгебраических уравнений [1]:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k K_{ik} \Delta u \Delta v + \Delta_i = \delta, \ (i = 1,2,\dots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \Delta u \Delta v = F, \tag{5}$$

где $i$, $n$ — номер и число контактирующих участков; $q_i$, $q_k$ — контактные напряжения (давления) на участках; $K_{ik}$ — коэффициент влияния единичной, равномерно распределённой по $k$-му участку нагрузки на сумму перемещений поверхностей зубьев (вследствие деформаций зубьев и их оснований) в расчётной точке $i$-го участка; $\Delta u$, $\Delta v$ — длина и ширина прямоугольных участков; $\Delta_i$ — существовавший до нагружения зазор (в направлении общей контактной нормали) между поверхностями тел в расчётной точке $i$-го участка; δ — сближение контактирующих тел (вследствие всех видов деформаций); $F$ — внешняя сжимающая сила.

Если при сближении деформируемые тела перемещаются друг относительно друга поступательно, то без учета сил трения систему уравнений (5) можно, следуя (3), представить в виде:

$$\Delta_i + W_i = \delta, \ (i = 1,\dots,n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F, \tag{6}$$

где $i$, $n$ — номер и число контактирующих участков; $\Delta_i$ — зазор между поверхностями тел до нагружения; $W_i$ — сумма местных и общих деформаций поверхностей тел; δ — линейное сближение деформируемых тел; $F_i$ — равнодействующая нагрузки, распределенной по $i$-му участку; $F$ — внешняя сжимающая сила.

Для вывода основной итерационной формулы нового итерационного процесса второе уравнение системы разделим почленно на величину δ:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i \ / \ \delta\right) = F \ / \ \delta, \tag{7}$$

Учитывая, что из первого уравнения непосредственно имеем $\delta = \Delta_i + W_i$, заменим этой суммой величину δ в левой части выражения (7) и получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i \ / \ \left(\Delta_i + W_i\right)\right) = F \ / \ \delta, \tag{8}$$

Дробное выражение в левой части (8) обозначим как:

$$f_i = F_i/(\Delta_i + W_i), \ (i = 1,..,n) \tag{9}$$

Эту величину $f_i$ и будем использовать для уточнения значения величины $F_i$ равнодействующей нагрузки, распределенной по $i$-му участку ($i$ = 1,..,n), на каждой последующей итерации внутреннего цикла.

Окончательно получаем следующий вид итерационного выражения: *предлагается для уточнения величины $F_i$ в итерациях внутреннего цикла использовать итерационное выражение, удовлетворяющее условию равновесия сил, вида*:

$$F_{i,k+1} = f_i F \ / \ \sum_{i=1}^{n} f_i, \tag{10}$$

где $F_{i,k+1}$ — уточнённое значение силы $F_{i,k}$; $k$ — порядковый номер итерации; $F$ — внешняя сжимающая сила;

$f_i$ — величина, обеспечивающая выполнение условий совместности перемещений в ходе итерационного процесса, простейшее выражение для которой имеет вид:

$$f_i = F_{i,k} / (\Delta_i + W_i),\ (i = 1,..,n). \qquad (11)$$

Докажем, что выражение (10) обеспечивает ***обязательное*** выполнение условия равновесия сил на ***каждой*** итерации внутреннего цикла. Действительно, при использовании выражения (10) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,k+1} = \sum_{i=1}^{n}\left[ f_i \left( F \Big/ \sum_{j=1}^{n} f_j \right)\right] = \left( F \Big/ \sum_{j=1}^{n} f_j \right) \sum_{i=1}^{n} f_i = F,$$

следовательно $$\sum_{i=1}^{n} F_{i,k+1} = F,, \qquad (12)$$

что и требовалось доказать.

Итерационная формула (10) используется для уточнения величины $F_i$ в итерациях *внутреннего* цикла. Уточнение границ площадок контакта и числа *n* участков, передающих нагрузку, производится в итерациях *внешнего* цикла по условиям (3) и (4). При этом в качестве величины δ линейного сближения деформируемых тел можно принимать или ***максимальное*** из величин $\delta_i$ ($i$ =1,…,$n$), полученных в конце каждого внутреннего цикла итераций, или их ***среднее*** значение.

## Сходимость алгоритма

Рассмотрим вопрос о сходимости такого итерационного алгоритма. Для этого выразим из (10) отношение

$$F_{i,k+1} \;/\; F_{i,k} = \left( F \Big/ \sum_{j=1}^{n} f_j \right) / \left( \Delta_i + W_i \right). \qquad (13)$$

Предположим, что величина δ = const. Тогда из (7) имеем, что

$$\left( F \Big/ \sum_{j=1}^{n} f_j \right) = \delta. \qquad (14)$$

Если $\Delta_i + W_i < \delta$, то из (13) с учётом (14) имеем $F_{i,k+1} > F_{i,k}$.

Если $\Delta_i + W_i = \delta$, имеем $F_{i,k+1} = F_{i,k}$. Если $\Delta_i + W_i > \delta$, имеем $F_{i,k+1} < F_{i,k}$.

Это доказывает, что при δ = const предлагаемый итерационный алгоритм всегда сходится, обеспечивая выполнение условий совместности перемещений с любой требуемой точностью.

Результаты выполненных расчётов на ЭВМ показывают, что описанный итерационный алгоритм сходится также и при ***монотонно убывающем, монотонно возрастающем*** или ***асимптотическом*** изменении величины δ в ходе итераций внутреннего цикла.

## Тестирование алгоритма

Тестовая проверка работы нового алгоритма расчёта распределения нагрузки при контакте тел проводилась для классической задачи контакта сферы с упругой полуплоскостью. Начальное распределение нагрузки — равномерное (самый неблагоприятный случай). На рис. 1–6 приведены изменения эпюр напряжений в ходе итерационного процесса.

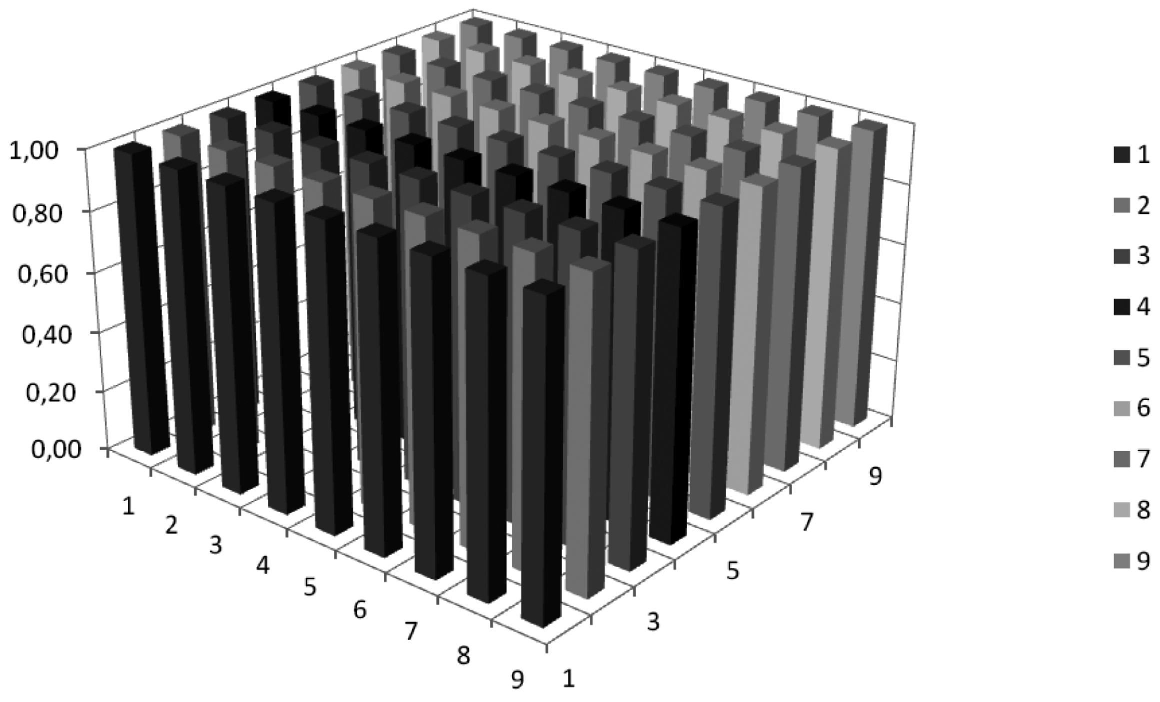


Рис. 1. Начальное приближение (равномерное распределение нагрузки)

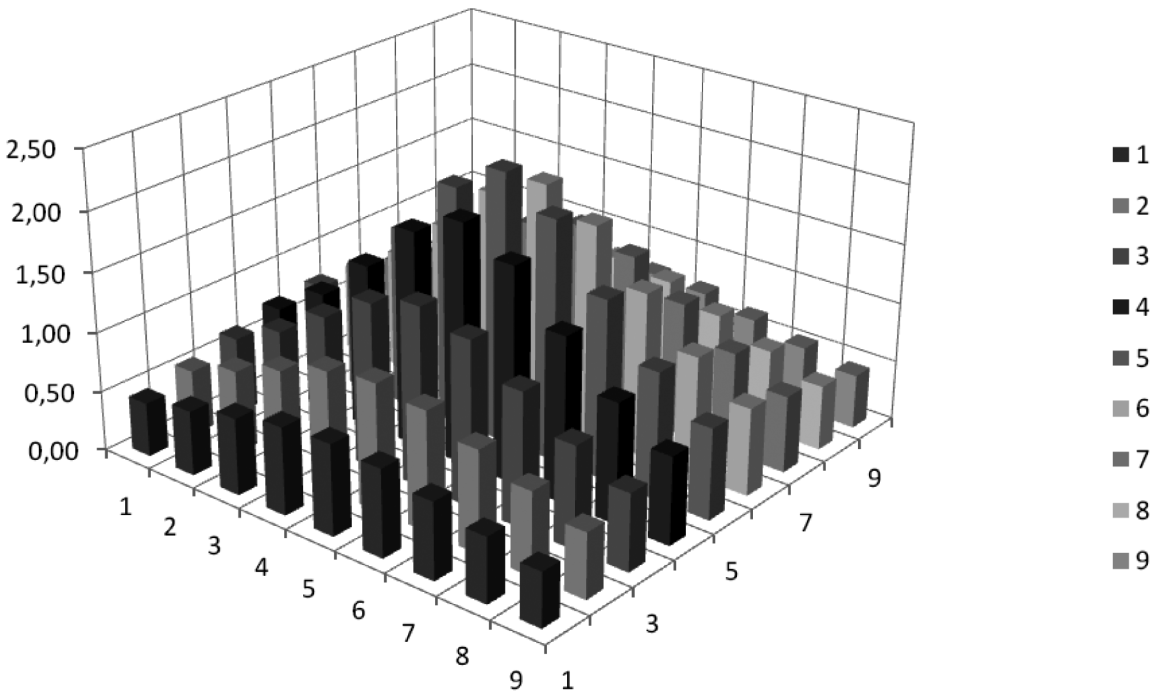


Рис. 2. Итерация 1

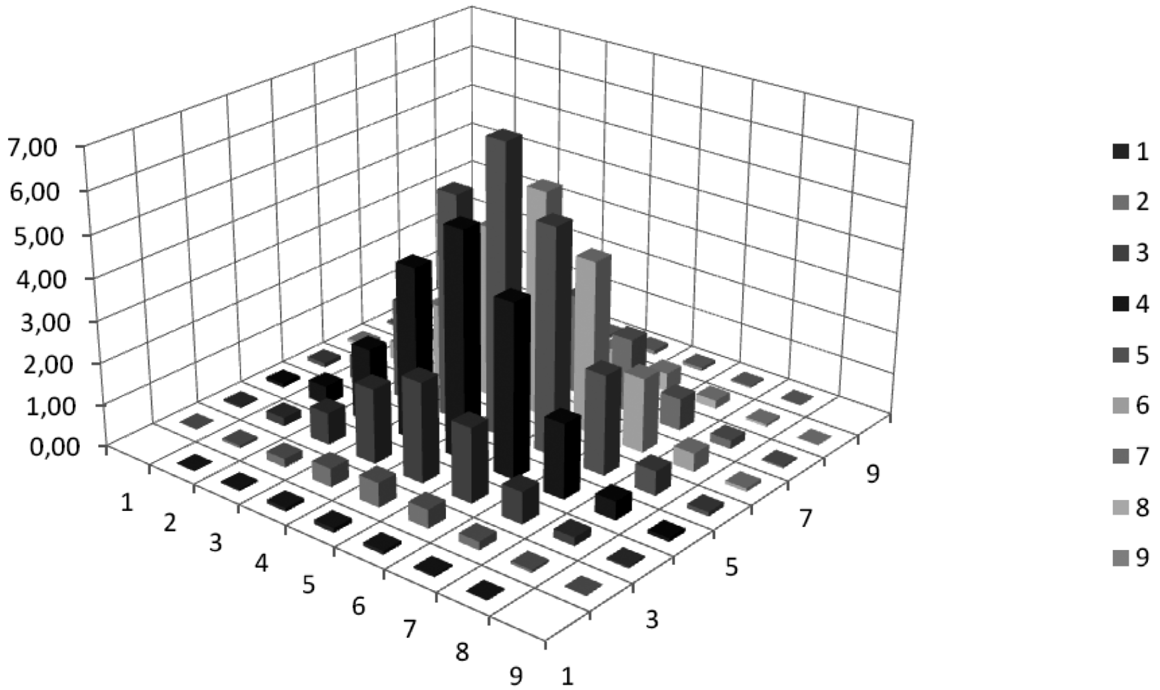


Рис. 3. Итерация 6

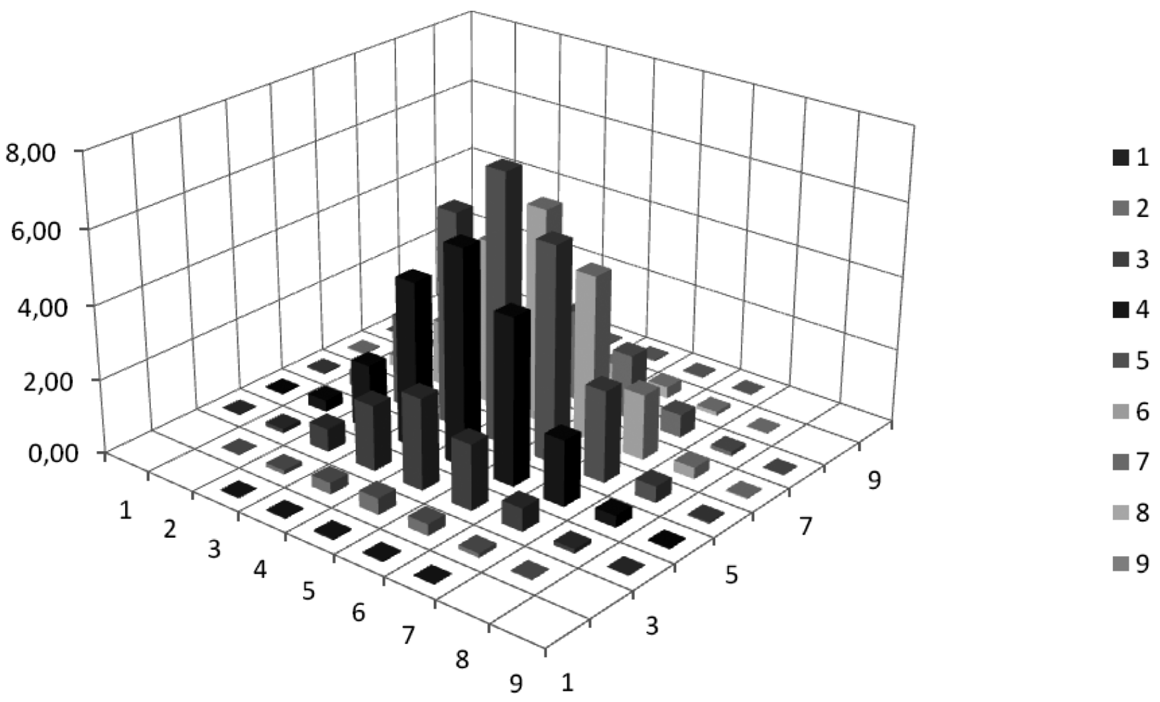


Рис. 4. Итерация 8

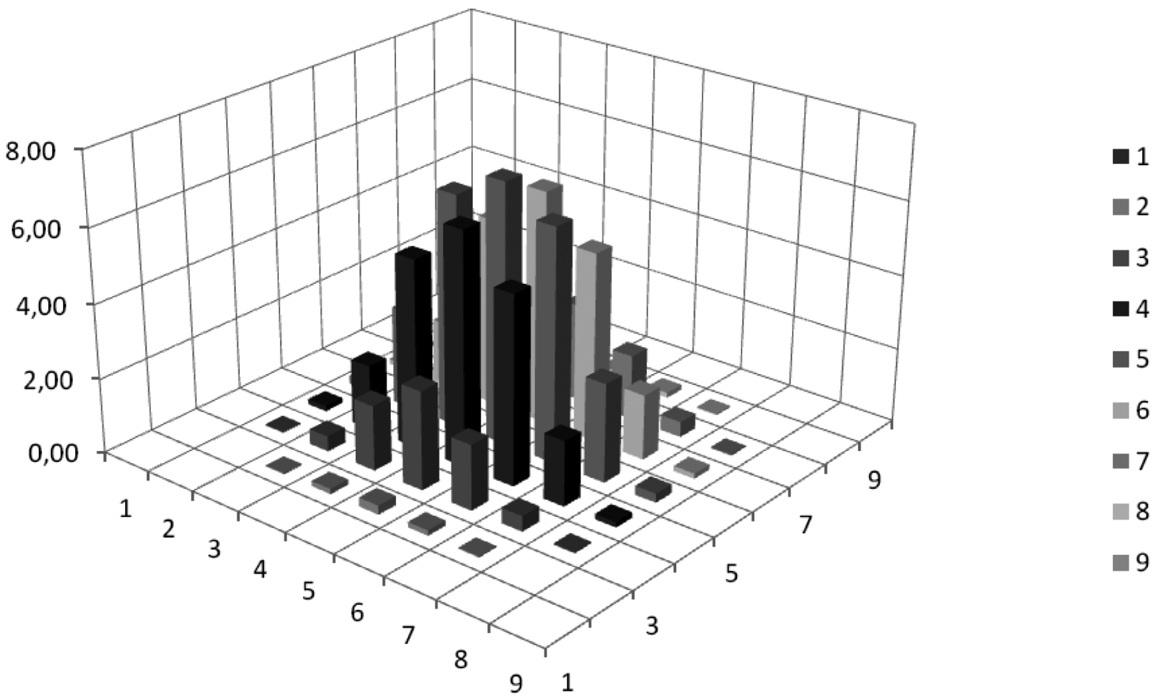


Рис. 5. Итерация 13

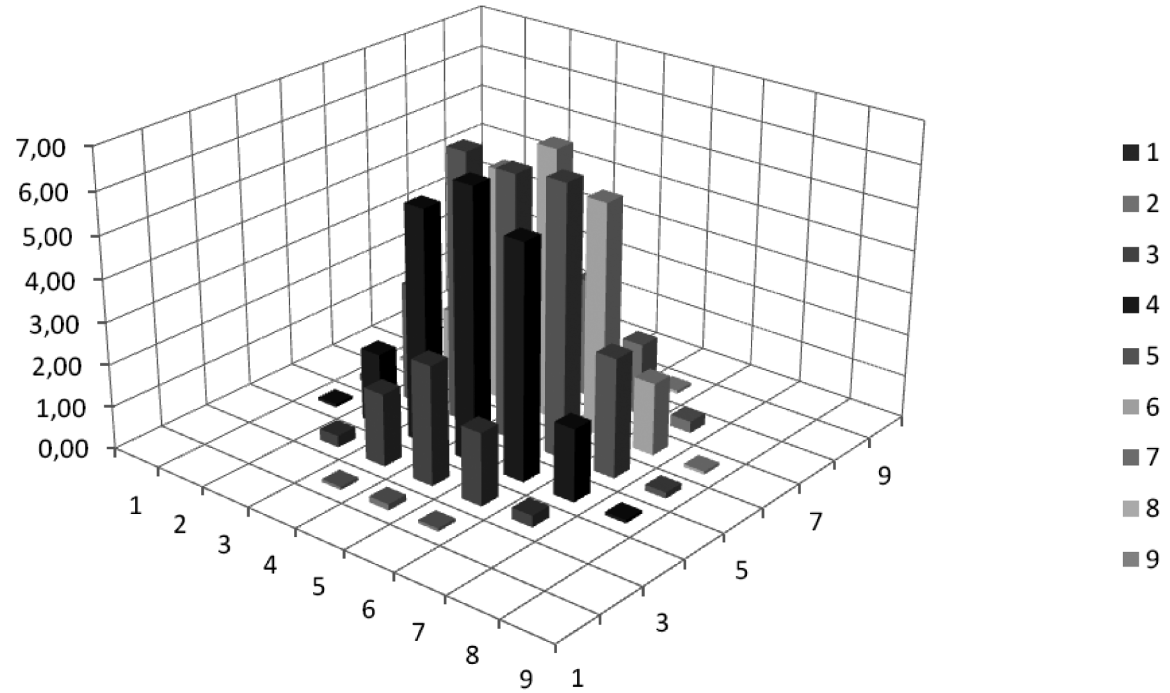


Рис. 6. Итерация 18 (последняя)

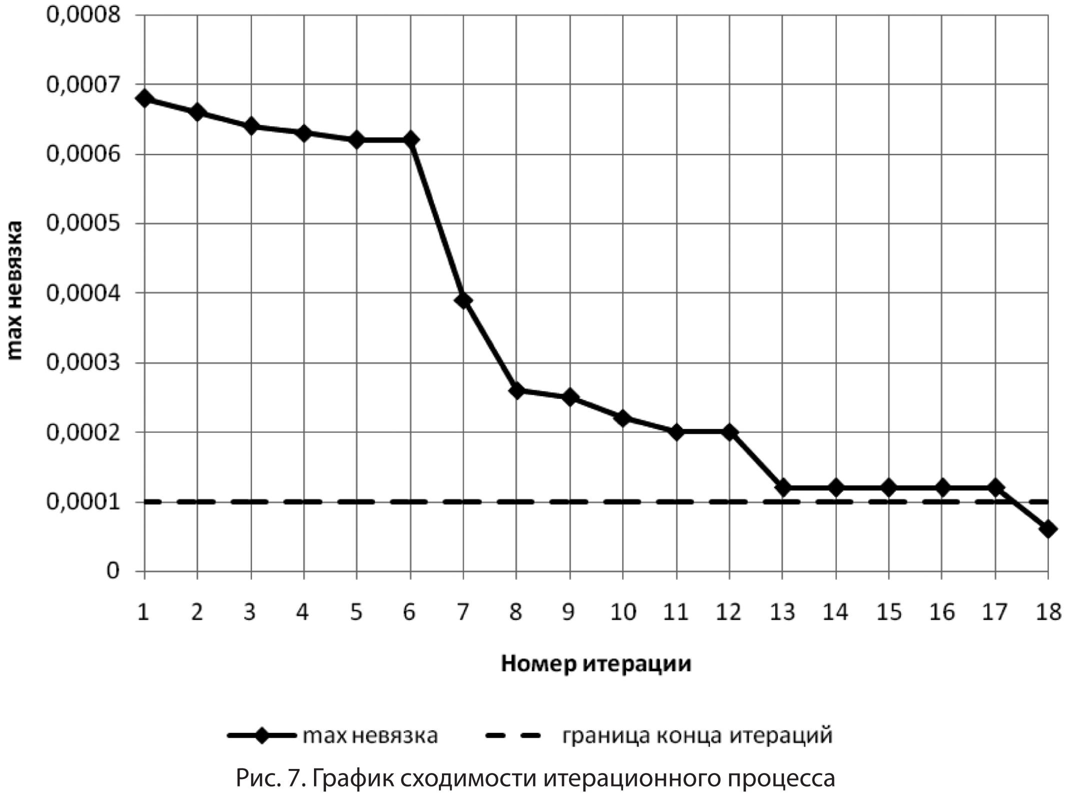


Рис. 7. График сходимости итерационного процесса

Таблица 1

Сравнение результатов моделирования и эксперимента [4]

| Угол контакта, градусы | Расстояние вдоль зуба, мм | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 | |
| | Контактное давление (МПа) по экспериментальным данным [4] (знаком × отмечены точки, в которых не удалось экспериментально измерить величину контактного давления) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 35 | | | | | | | | 3,9 | 5,4 | 5,9 | 5,4 | 3,9 | | | | | | | | | данные эксперимента [4] |
| 30 | | | | | | 1,5 | 4,9 | 6,6 | 8,5 | 9,8 | 10 | 9,6 | 8,0 | 5,9 | 1,5 | | | | | | |
| 25 | | | | | 2,6 | 5,9 | 8,3 | 9,8 | 11 | 10 | 9,8 | 8,5 | 6,9 | 5,6 | 3,7 | | | | | | |
| 20 | | | | 4,1 | 6,6 | 8,0 | 8,8 | 9,3 | 9,8 | 9,8 | 9,8 | 9,8 | 9,3 | 8,5 | 7,6 | 5,9 | | | | | |
| 17 | | | 2,9 | 5,1 | 6,9 | 7,8 | 8,6 | 9,0 | 9,5 | 9,8 | 9,8 | 9,5 | 9,3 | 8,3 | 6,9 | 4,9 | 2,5 | | | | |
| 14 | | | 3,9 | 5,4 | 6,1 | 6,9 | 7,8 | 7,8 | 7,8 | 7,8 | 7,8 | 7,5 | 7,3 | 6,9 | 5,9 | 5,4 | 3,9 | 2,5 | | | |
| 12 | | 2,0 | 4,9 | 6,7 | 7,6 | 7,6 | 7,5 | 7,1 | 6,9 | 6,6 | 6,6 | 6,6 | 6,6 | 6,9 | 7,8 | 7,8 | 7,1 | 5,4 | | | |
| 9 | | 3,7 | 6,4 | 6,4 | 6,9 | 6,9 | 5,9 | 5,4 | 4,9 | 4,9 | × | × | × | × | × | × | × | | | | |
| 8 | | 4,4 | 6,4 | 6,4 | 5,9 | 5,4 | 2,9 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 4,9 | 6,1 | 6,4 | 6,4 | 6,4 | 6,2 | 6,1 | 5,9 | 3,9 | | |
| 6 | | 4,9 | 5,9 | 5,9 | 5,4 | 2,5 | | | 2,0 | 4,4 | 5,9 | × | × | × | × | × | × | × | × | | |
| | Контактное давление (МПа) по результатам моделирования | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 35 | | | | | | | | 3,9 | 5,9 | 6,8 | 6,8 | 5,8 | 4,1 | | | | | | | | моделирование |
| 30 | | | | | | 2,6 | 5,5 | 6,9 | 7,6 | 7,9 | 8,0 | 7,6 | 6,8 | 5,5 | 2,5 | | | | | | |
| 25 | | | | | 3,4 | 6,1 | 7,5 | 8,2 | 8,6 | 8,8 | 8,7 | 8,5 | 7,9 | 7,0 | 5,9 | 3,2 | | | | | |
| 20 | | | | 4,4 | 6,4 | 7,5 | 8,1 | 8,5 | 8,7 | 8,7 | 8,6 | 8,5 | 8,3 | 7,9 | 7,2 | 5,8 | 3,5 | | | | |
| 15 | | | 4,2 | 6,1 | 7,0 | 7,5 | 7,8 | 7,9 | 8,0 | 7,9 | 7,9 | 7,8 | 7,7 | 7,3 | 7,1 | 6,6 | 5,8 | 4,0 | | | |
| 10 | 2,6 | 5,3 | 6,3 | 6,8 | 7,0 | 6,9 | 6,7 | 6,4 | 6,0 | 5,7 | 5,6 | 5,6 | 5,6 | 6,1 | 6,4 | 7,2 | 7,8 | 8,1 | 6,6 | 4,1 | |
| 5 | 2,0 | 6,4 | 8,6 | 6,6 | 4,8 | 3,1 | 1,8 | | | | | | | | | | | | | | |

На рис. 7 приведён график сходимости итерационного процесса по изменению величины невязки перемещений $E_i$ .

В результате этим дискретным итерационным методом было всего за 18 итераций получено решение с полуэллиптической эпюрой напряжений, аналогичное классическому решению Герца контактной задачи.

## Пример использования

В таблице 1 и на рис. 8–9 приведены результаты математического моделирования (с использованием описанного выше алгоритма расчёта распределения нагрузки при контакте тел дискретным численным итерационным методом) контактных взаимодействий круговинтовых поверхностей зубьев в цилиндрической зубчатой передаче с зацеплением Новикова и сопоставления их с экспериментальными данными А.С. Яковлева и В.И. Печеного [4]. При математическом моделировании исходные данные (параметры зубьев, материала и т.д.) соответствовали условиям проведения экспериментов [4].

## Заключение

Разработанный итерационный алгоритм ***не требует многократного решения системы линейных уравнений***, что позволяет уменьшить затраты машинного времени и памяти ЭВМ при решении сложных контактных задач, повысить точность решения за счет разбиения контактирующих поверхностей на большее число n дискретных участков. При использовании выражения (10) итерационный алгоритм можно применять при ***нелинейной*** зависимости деформаций от сил.

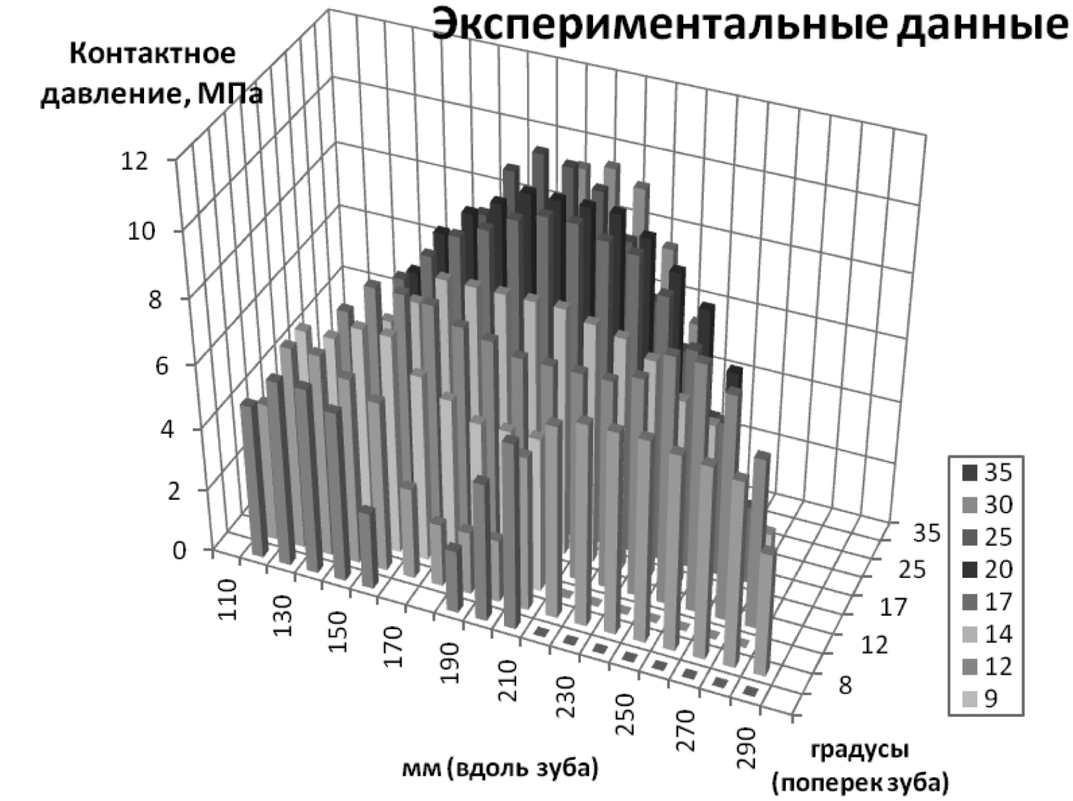


Рис. 8. Данные эксперимента [4]

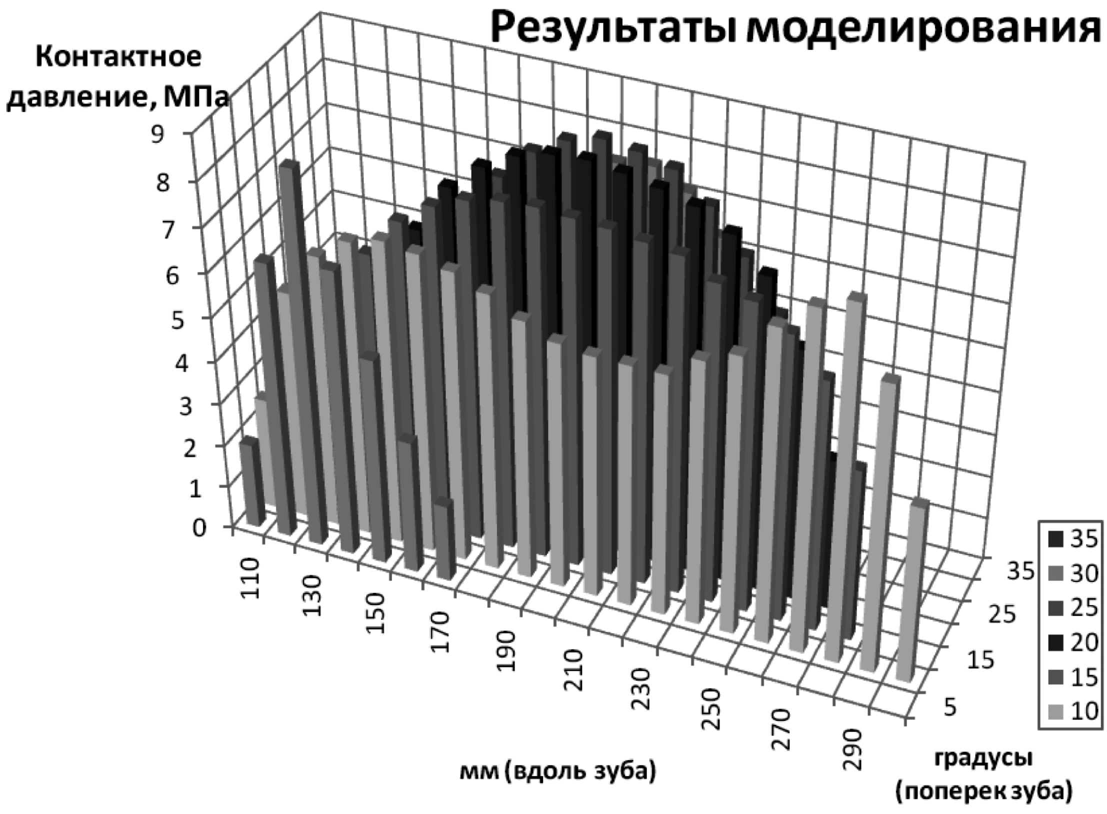


Рис. 9. Результаты моделирования

ЛИТЕРАТУРА


1. Иосилевич, Г.Б. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин / Г.Б. Иосилевич. — Москва: Машиностроение, 1981. — 224 с.
2. Заблонский, К.И. Распределение нагрузки в зацеплении / К.И. Заблонский. — Киев: Техника, 1977. — 208 с.
3. Шевелева, Г.И. Численный метод решения контактной задачи при сжатии упругих тел / Г.И. Шевелева // Машиноведение. — 1981. — №5. — С.90–94.
4. Яковлев, А.С. Исследование контактных напряжений зубьев передач с зацеплением Новикова / А.С. Яковлев, В.И. Печеный // Темат. сб. науч. работ / Краматорск. науч.-иссл. и проект.-технол. ин-т машиностр. — Краматорск, 1971. — Вып.11.




Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»