ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНО- И ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Марков Павел Владимирович
Заместитель генерального директора, ООО «ЮНИ-КОНКОРД», Тюменский государственный университет
markov.pv@mail.ru

Аннотация. Целью данного исследования является поиск классов разностных схем, обладающих непрерывными группами симметрий и практическими приложениями в области моделирования процессов фильтрации в пористых средах. Классы разностных схем с непрерывными группами симметрий в данной статье находятся на основе известного метода построения разностных схем, наследующих непрерывные группы симметрий исходных дифференциальных уравнений. На основе указанного метода получены групповые классификация разностных схем дифференциальных уравнений фильтрации газа и двухфазной фильтрации в рамках задачи Рапопорта-Лиса на основе известных групповых классификаций соответствующих параболических дифференциальных уравнений. Для найденных классов разностных схем получено обобщение на многомерные случаи. Полученные классы могут быть использованы для ускорения численных расчетов при моделировании указанных в статье видов процессов одно- и двухфазной фильтрации на микро- и макромасштабе пористой среды.

Ключевые слова: групповая классификация разностных схем; двухфазная фильтрация воды и нефти; непрерывная группа симметрии; однофазная фильтрация газа; параболические дифференциальные уравнения; пористая среда; уравнение Рапопорта-Лиса.

GROUP CLASSIFICATION OF DIFFERENCE SCHEMES OF PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ONE- AND TWO-PHASE FLOW IN POROUS MEDIA

P. Markov

Summary. The purpose of this study is to find classes of difference schemes with continuous symmetry groups and practical applications in the field of modeling of filtration processes in porous media. The classes of difference schemes with continuous symmetry groups are found in this article based on the well-known method of difference schemes construction with the preservation of continuous symmetry groups of original differential equations. Group classifications of difference schemes for differential equations of gas flow and two-phase flow within the Rapoport-Leas problem are obtained on the basis of known group classifications of corresponding parabolic differential equations and the mentioned method. A generalization for multidimensional cases is obtained for the found classes of difference schemes. The obtained classes can be used to accelerate numerical calculations when modeling mentioned in the article types of processes of one- and two-phase flow on micro- and macroscales of porous media.

Keywords: continuous symmetry group; group classification of difference schemes; one-phase gas flow; parabolic differential equations; porous media; Rapoport-Leas equation; two-phase flow of water and oil.

Введение

Как и любые процессы или явления, процессы фильтрации в пористых средах могут быть описаны различными типами моделей. Существует целый ряд различных классификаций моделей [13], которые зависят от целей моделирования, масштабов, используемых математических и физических методов. Обычно рассматриваются следующие типы моделей фильтрации: непрерывные (дифференциальные уравнения) и дискретные (разностные схемы). Под непрерывными моделями подразумеваются модели, для которых пространства независимых переменных, значений неизвестных функций и времени являются континуумами [13]. Наиболее распространенными примерами непрерывных моделей являются дифференциальные уравнения. Под дискретными моделями может пониматься обширный класс различных типов уравнений. Дискретность моделей может проявляться в следующем: дискретность множества точек в пространстве (фазовое пространство), в которых задаются состояния исследуемой системы, дискретность множества состояний системы и дискретность времени [10]. К примеру, для разностных схем пространство значений неизвестных функций может быть континуумом, а пространственно-временные переменные могут принадлежать дискретному пространству. Примерами моделей дискретных по всем трем указанным выше переменным являются клеточные автоматы. Все результаты данной статьи получены для дискретных моделей процессов фильтрации в пористых средах, где дискретным является пространство и время, а пространство состояний системы может быть как непрерывным, так и дискретным.

Общая система уравнений для дискретных моделей фильтрации в пористых средах

Дискретная модель процессов фильтрации в пористых средах может быть описана с помощью следующей системы уравнений

$$\begin{cases} E_i(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_{n_g},\vec{y}_1,\vec{y}_2,\dots,\vec{y}_{n_g},\vec{p}_1,\vec{p}_2,\dots,\vec{p}_{n_g})=0, \ i=1,\dots,n_e, \\ G_j(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_{n_g},\vec{y}_1,\vec{y}_2,\dots,\vec{y}_{n_g},\vec{p}_1,\vec{p}_2,\dots,\vec{p}_{n_g})=0, \ j=1,\dots,n_g, \\ C_k(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_{n_g},\vec{y}_1,\vec{y}_2,\dots,\vec{y}_{n_g},\vec{p}_1,\vec{p}_2,\dots,\vec{p}_{n_g})=0, \ k=1,\dots,n_b, \end{cases} \quad (1)$$

где E_i — дискретные уравнения, G_j — уравнения, определяющие расчетную сетку, состоящую из дискретного множества узлов, C_k — уравнения, задающие начальные и граничные условия, $\vec{x}=(x^1,x^2,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n$ — вектор независимых переменных (среди переменных может быть время), $\vec{y}(\vec{x})=(y^1(\vec{x}),y^2(\vec{x}),\dots,y^m(\vec{x}))\in\mathbb{R}^m$ — вектор неизвестных функций, $\vec{p}(\vec{x},\vec{y})=(p^1(\vec{x},\vec{y}),p^2(\vec{x},\vec{y}),\dots,p^l(\vec{x},\vec{y}))\in\mathbb{R}^l$ — вектор параметров модели.

Под решением системы уравнений (11) будем понимать такой набор значений векторов $S_k=\{\vec{x}_k,\vec{y}_k\}$ для каждого узла сетки под номером k и заданного набора параметров модели, который при подстановке в (11) обращает в ноль левые части уравнений. Функции E_i, G_j, C_k полагаются имеющими все необходимые свойства в зависимости от решаемой задачи, например, требование существования решений системы (11) и требование непрерывности функций.

Дискретная модель, которая задается с помощью системы уравнений вида (11), является обобщением разностных схем, которое приводится в статье [8]. Данная система уравнений вводится для объединения разных типов уравнений, соответствующих дискретной динамической системе [10], разностной схеме [17] и модели поровой сети [11], но схожих по своей сути, как самостоятельных математических объектов. Например, дискретные динамические системы можно рассматривать как явные разностные схемы. Сами разностные схемы при этом можно рассматривать без условия соответствия в пределе некоторому дифференциальному уравнению, если, к примеру, они получены изначально на основе некоторого дискретного закона сохранения.

Существующий метод построения разностных схем с сохранением непрерывных симметрий дифференциальных уравнений

Подход построения разностных схем с сохранением непрерывных симметрий для исходного дифференциального уравнения описан в [5]. Существует разные подходы к определению действия преобразований непрерывной группы [5,20] на уравнения дискретных моделей, при этом во многих случаях они являются эквивалентными:

- продолжение действия преобразований группы на значения независимых переменных и неизвестных функций в соседних точках на сетке: группа преобразований действует на узлы сетки и значения в них независимо друг от друга, и продолжение группы строится с учетом этого;
- введение в рассмотрение конечно-разностных производных и шагов на сетке, которые рассматриваются в соседних узлах сетки (продолжение подобно случаю дифференциальных уравнений).

В данной статье используется первый из описанных подходов, то есть подход с рассмотрением только значений независимых переменных и неизвестных функций в узлах сетки. Данный выбор объясняется большей простотой первого подхода на этапе продолжения инфинитезимальных операторов на соседние точки на сетке.

Новая групповая классификация разностных схем уравнений фильтрации газа

Групповой анализ с помощью непрерывных групп симметрий используется далее для получения семейств разностных схем с непрерывными симметриями. Групповой анализ как дифференциальных, так и разностных уравнений, является важным для понимания самих уравнений и процессов, которые они описывают. Например, в статье [2] для уравнений двухфазной фильтрации получены новые законы сохранения и частные решения.

В данном разделе рассматривается частный случай параболических дифференциальных уравнений в частных производных — уравнение фильтрации газа в одномерной пористой среде [1]. Это уравнение задается как

$$\frac{\partial\left(\rho(P)\varphi(P)\right)}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)}\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0, \quad (2)$$

где $\rho(P)$ — плотность газа (кг/м^3), $\varphi(P)$ — пористость (д. ед.), $K(P)$ — абсолютная проницаемость (м^2), $\mu(P)$ — вязкость газа (Па·сек), $P(t,x)$ — давление (Па).

Уравнение (2) может быть сведено к (3)

$$\frac{d\alpha(P)}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(P)\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0, \quad (3)$$

что дает наглядное представление того, что оно похоже на соответствующее уравнение теплопроводности. Различные типы уравнений теплопроводности хорошо изучены с точки зрения группового анализа [7]. Введенные коэффициенты используются далее для представле-

Таблица 1. Инвариантные разностные схемы для уравнений фильтрации газа

№	α	β	Операторы	Разностные инварианты
1	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 e^P$	$X_1, X_2, X_3,$ $\bar{X}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial P}$	$J_1 = \frac{(x_{k+p_1} - x_{k+p_2})(x_{k+p_3} - x_{k+p_4})}{(t^{n+p_5} - t^{n+p_6})e^{P_{k+p_8}^{n+p_7}}},$ $J_2 = P_{k+p_{10}}^{n+p_9} - P_{k+p_{12}}^{n+p_{11}},\ J_3 = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}$
2	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 P^{c_4},$ $c_4 \neq 0, -\frac{4}{3}$	$X_1, X_2, X_3,$ $\bar{X}_4 = \frac{c_4}{2} x\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial P}$	$J_1 = \frac{(x_{k+p_1} - x_{k+p_2})(x_{k+p_3} - x_{k+p_4})}{(t^{n+p_5} - t^{n+p_6})(P_{k+p_8}^{n+p_7})^{c_4}},$ $J_2 = P_{k+p_{10}}^{n+p_9} \big/ P_{k+p_{12}}^{n+p_{11}},\ J_3 = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}$
3	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 P^{-4/3}$	$X_1, X_2, X_3,$ $\bar{X}_4 = -\frac{2}{3} x\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial P},$ $\bar{X}_5 = -x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xP\frac{\partial}{\partial P},$	$J_1 = \frac{P_{k+p_2}^{n+p_1}(x_{k+p_2} - x_{k+p_3})^{3/2}}{(x_{k+p_3} - x_{k+p_4})^{3/2}} \times$ $\times \frac{(x_{k+p_2} - x_{k+p_4})^{3/2}}{(t^{n+p_5} - t^{n+p_6})^{3/4}},$ $J_2 = \frac{t^{n+p_7} - t^{n+p_8}}{t^{n+p_9} - t^{n+p_{10}}},$ $J_3 = \frac{(x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{12}})(x_{k+p_{13}} - x_{k+p_{14}})}{(x_{k+p_{12}} - x_{k+p_{14}})(x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{13}})}$
4	$\frac{d\alpha}{dP} = c_3 e^{-P} \times$ $\times (c_1 - e^{-P})^{c_2}$	$\beta = c_4 e^{-P}$	$X_1, X_2,$ $\bar{X}_3 = c_2 t\frac{\partial}{\partial t} +$ $+(c_1 e^P - 1)\frac{\partial}{\partial P},$	$J_1 = \frac{(t^{n+p_1} - t^{n+p_2})e^{c_2 P_{k+p_4}^{n+p_3}}}{(c_1 e^{P_{k+p_4}^{n+p_3}} - 1)^{c_2}},$ $J_2 = \frac{(c_1 e^{P_{k+p_6}^{n+p_5}} - 1)}{(c_1 e^{P_{k+p_8}^{n+p_7}} - 1)} e^{P_{k+p_8}^{n+p_7} - P_{k+p_6}^{n+p_5}},\ J_3 = x_{k+p_5} - x_{k+p_6}$

ния известных групповых классификаций этих дифференциальных уравнений и получения соответствующих сеточных представлений. Для дифференциального случая групповая классификация проведена для семейства уравнений (3) и ее можно найти в работе [3]. Эти результаты вместе с теорией из [5] используются для получения семейств инвариантных разностных схем для дифференциальных уравнений типа (3) (Таблица 1), которые стоят за физической задачей (2).

В данной таблице $p_i \in \mathbb{Z}$ и $c_j \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, верхний индекс n отвечают за время, нижний индекс k — за пространственную координату, операторы X_1, X_2, X_3 —

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}. \quad (4)$$

Результаты, которые представляет Таблица 1, совпадают с результатами из [6] для случаев 1–3 и определенных значений констант p_i. Все случаи из этой таблицы могут иметь коэффициенты с определенным физическим смыслом, а разностные инварианты могут быть использованы для построения большого класса инвариантных разностных схем. Пример для одного из классов представлен в работе [9].

Новая групповая классификация разностных схем уравнений двухфазной фильтрации

В данном разделе рассматривается одномерное уравнение Рапопорта-Лиса, которое является обобщением классической задачи Баклея-Леверетта с учетом

Таблица 2. Инвариантные разностные схемы для уравнений Рапопорта-Лиса

№	A	B	Операторы	Разностные инварианты
1	$A=c_1S^{c_2}$, $c_2\neq-1$	$B=c_1c_3S^{c_2+1}$	X_1, X_2, $\overline{X}_3=-t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{S}{c_2}\frac{\partial}{\partial S}$	$J_1=(t^{n+p_1}-t^{n+p_2})(S_{k+p_4}^{n+p_3})^{c_2}$, $J_2=S_{k+p_6}^{n+p_5}\big/S_{k+p_8}^{n+p_7}$, $J_3=x_{k+p_9}-x_{k+p_{10}}$
2	$A=\frac{c_1}{S}$	$B=c_1c_3\ln S$	X_1, X_2, $\overline{X}_3=-t\frac{\partial}{\partial t}-S\frac{\partial}{\partial S}$	$J_1=\frac{(t^{n+p_1}-t^{n+p_2})}{S_{k+p_4}^{n+p_3}}$, $J_2=S_{k+p_6}^{n+p_5}\big/S_{k+p_8}^{n+p_7}$, $J_3=x_{k+p_9}-x_{k+p_{10}}$
3	$A=c_1e^{c_2S}$	$B=c_1c_3e^{c_2S}$	X_1, X_2, $\overline{X}_3=-t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{c_2}\frac{\partial}{\partial S}$	$J_1=(t^{n+p_1}-t^{n+p_2})e^{c_2S_{k+p_4}^{n+p_3}}$, $J_2=S_{k+p_6}^{n+p_5}-S_{k+p_8}^{n+p_7}$, $J_3=x_{k+p_9}-x_{k+p_{10}}$

функции капиллярного давления и записывается в виде [16]

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{K}{\varphi\mu_o}\frac{\partial}{\partial x}\left(K_o(S)f(S)\frac{dP_c}{dS}\frac{\partial S}{\partial x}\right)+\frac{V}{\phi}\frac{df}{dS}\frac{\partial S}{\partial x}=0,\ (5)$$

где $S(t,x)$ — водонасыщенность (д. ед.), $\varphi = const$ — пористость (д. ед.), $K = const$ — абсолютная проницаемость (м^2), μ_w, $\mu_0 - const$ — вязкости воды и нефти соответственно (Па·сек), $P_c(S)$ — капиллярное давление (Па), $V - V_0 + V_w - const$ — суммарная скорость потока жидкости (м/сек), $K_w(S)$ и $K_0(S)$ — относительная фазовая проницаемость (ОФП) для воды и нефти соответственно (д. ед.),

$$f(S)=\frac{K_w(S)/\mu_w}{K_w(S)/\mu_w+K_o(S)/\mu_o}\ —$$

функция Баклея-Леверетта, характеризующая долю воды в потоке (д. ед.).

Уравнение (5) может быть записано как

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(A(S)\frac{\partial S}{\partial x}\right)+\frac{\partial B(S)}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}=0\ (6)$$

и быть использовано для групповой классификации разностных схем, которая приводится ниже. Для уравнения (6) на основе результатов классификации соответствующего типа дифференциальных уравнений, которая представлена в [15], получена классификация (пример для одного из классов — [9,12]) разностных схем (Таблица 2), где X_1 и X_2 берутся из (4), c_1, c_2, c_3 — некоторые константы.

Цель полученных классификаций состоит в том, чтобы представить только дифференциальные уравнения и их инвариантные разностные схемы (получаются выражением из разностных инвариантов) с коэффициентами, которые могут быть выбраны из реальных физических задач одно- и двухфазной фильтрации в пористых средах. Также выбор классов подчинен требованию возможности получения явного аналитического вида преобразований группы симметрии и разностных инвариантов при решении соответствующих дифференциальных уравнений (необходимо для метода из работы [12]). Таким образом, результаты, которые представляет Таблица 2, а также Таблица 1, не предназначены для охвата всех уравнений из известных классификаций дифференциальных уравнений, которые, в частности, могут описывать другие процессы: теплоперенос, диффузия и др.

Обобщение полученных классификаций на многомерные случаи

Уравнение (3) может быть записано для многомерного случая в виде

$$\frac{d\alpha(P)}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\beta(P)\frac{\partial P}{\partial x^i}\right)=0,\ (7)$$

а уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(A(S)\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)+\frac{\partial B(S)}{\partial S}\sum_{i=1}^{n}V^i\frac{\partial S}{\partial x^i}=0,\ (8)$$

где используются коэффициенты α и β (Таблица 1) и коэффициенты A и B (Таблица 2) для уравнений (7) и (8) соответственно, а также постоянные компоненты скорости потока V^i.

Большинство операторов из указанных таблиц имеет вид

$$X=\xi^0(t)\frac{\partial}{\partial t}+\xi^1(x^1)\frac{\partial}{\partial x^1}+\eta(y)\frac{\partial}{\partial y},\ (9)$$

где под переменной y понимается функции давления или насыщенности. Такой вид операторов позволяет обобщить полученные классификации разностных схем на случай n пространственных переменных. Обобщенные инфинитезимальные операторы примут вид

$$X = \xi^0(t)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} c_i \xi^1(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (10)$$

где c_i — некоторые константы, удовлетворяющие следующим условиям:

- если $\xi^0(t) \equiv 0$ и $\eta(y) \equiv 0$, то получаем n операторов вида (10), где только одна из констант c_i не равна нулю;
- в противном случае все c_i не равны нулю.

Данные операторы будут соответствовать непрерывным группам симметрий уравнений (7) и (8) с учетом коэффициентов и исходных операторов вида (9) — Таблица 1 и Таблица 2.

Для получения разностных инвариантов для многомерного случая нужно «продублировать» на все новые пространственные переменные те инварианты, которые содержат в одномерном случае пространственную переменную, а для зависимых переменных нужно добавить индексы, отвечающие за новые пространственные переменные. Например, для случая 1 классификации разностных схем для уравнения фильтрации газа (Таблица 1) обобщенные на n-мерный случай разностные инварианты будут иметь вид (11):

$$J_1^i = \frac{\left(x^i_{k^i+p_1^i} - x^i_{k^i+p_2^i}\right)\left(x^i_{k^i+p_3^i} - x^i_{k^i+p_4^i}\right)}{\left(t^{n+p_5} - t^{n+p_6}\right) e^{P^{n+p_7}_{k^i+p_8^1,\dots,k^i+p_8^n}}},$$

$$J_2 = P^{n+p_9}_{k^i+p_{10}^1,\dots,k^i+p_{10}^n} - P^{n+p_{11}}_{k^i+p_{12}^1,\dots,k^i+p_{12}^n},$$

$$J_3 = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}, \quad (11)$$

где верхний индекс $i = 1 \dots n$ для констант p_1, p_2, p_3, p_4, p_8, p_{10}, p_{12} и для индекса k означает номер пространственной переменной.

Случай 3 классификации разностных схем для уравнений фильтрации газа не может быть обобщен на многомерный случай описанным здесь способом, так как у него оператор X_4 не записывается в форме (9). Данный случай требует получения полной групповой классификации дифференциальных уравнений вида (7), что не является целью данной статьи. Также стоит отметить, что получаемая указанным здесь способом группа непрерывных симметрий может являться не полной, а для того, чтобы получить полную группу симметрий, нужно проводить полноценный групповой анализ этих уравнений, что также не является целью данной статьи.

Заключение

Непрерывные группы симметрий дискретных моделей теории фильтрации содержат в себе фундаментальную информацию о модели и решениях ее уравнений. Это, в частности, дает возможность использование таких моделей на практике для ускорения численных расчетов [9,12], что является важным фактором при проведении серийных расчетов в инженерной практике. Ускорение численных расчетов может быть достигнуто в рамках найденных классов разностных схем и, в частности, упомянутых ниже примеров моделей различных процессов фильтрации.

Классы разностных уравнений фильтрации газа (Таблица 1) можно применять для ускорения численных расчетов при решении обратных задач:

- при моделировании однофазного течения газа [22];
- при моделировании многофазного течения [14,18] с учетом закона Пуазейля в моделях поровых сетей;
- при моделировании динамики пленок в системе газ-жидкость-капилляр [21] в моделях поровых сетей.

Результаты группового анализа могут быть использованы для ускорения расчетов на макро- и мезомасштабах (например, различные фильтры для очистки газа) с помощь следующих дискретных макромоделей, которые используются, в частности, при ремасштабировании, описанном в работе [11]:

Классы разностных схем для уравнений фильтрации газа (Таблица 1) можно применять для моделирования однофазной фильтрации на различных масштабах. К примеру, возможно применение для моделирования процессов, связанных с геологическим хранением CO_2 (CO_2 geological storage) [19] или, в частности, процессов закачки CO_2 на макромасштабах пористой среды [4].

Классы разностных схем для уравнений Рапопорта-Лиса (Таблица 2) с аналитическими зависимостями для ОФП и капиллярного давления можно применять для моделирования различных процессов двухфазной фильтрации на разных масштабах нефтегазоносного пласта.

Фильтрационно-емкостные параметры для уравнения фильтрации газа (2) и уравнения Рапопорта-Лиса (5) (например функции ОФП) могут быть получены с помощью указанных выше моделей поровых сетей, и в дальнейшим к этим уравнениям могут быть применены результаты их исследований с помощью непрерывных групп симметрий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Al-Hussainy, R. The Flow of Real Gases through Porous Media / R. Al-Hussainy, H. J. Ramey, P. B. Crawford. // Journal of Petroleum Technology.— 1966.— Vol. 18, Iss. 5.— P. 624–636.
2. Baikov, V. A. Conservation laws for two-phase filtration models / V. A. Baikov, N. H. Ibragimov, I. S. Zheltova, A. A. Yakovlev. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.— 2014.— Vol. 19, Iss. 2,— P. 383–389.
3. Baikov, V. A. Water Redistribution in Irrigated Soil Profiles: Invariant Solutions of the Governing Equation / V. A. Baikov, R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev. // Nonlinear Dynamics.— 1997.— No 13.— P. 395–409.
4. Carneiro, J. F. Numerical simulations on the influence of matrix diffusion to carbon sequestration in double porosity fissured aquifers / J. F. Carneiro. // International Journal of Greenhouse Gas Control.— 2009.— Vol. 3, Iss. 4.— P. 431–443.
5. Dorodnitsyn, V. Applications of Lie Groups to Difference Equations / V. Dorodnitsyn.— Chapman and Hall/CRC, 2011.— 344 p.
6. Dorodnitsyn, V. The whole set of symmetry preserving discrete versions of a heat transfer equation with a source: preprint / V. Dorodnitsyn, R. Kozlov.— NTNU, Trondheim, Norway.— 1997.— 41 p.
7. Lagno, V. I. Symmetry analysis of evolutional type equations / V. I. Lagno, S. V. Spichak, V. I. Stogniy.— Moscow-Izhevsk: Institute of computer research, 2004.— 392 p.
8. Levi, D. Continuous Symmetries of Equations on Lattices / D. Levi, S. Tremblay, P. Winternitz. // Czechoslovak Journal of Physics.— 2001.— Vol. 51, Iss. 4.— P. 349–356.
9. Markov, P. V. Group classification applications for analysis of discrete models of flow in porous media / P. V. Markov. // Journal of Physics: Conference Series.— 2017.— Vol. 894, Iss. 1.— P. 1–7.
10. Markov, P. V. Group classification of discrete dynamical systems// Rus. J. Nonlin. Dyn.— 2013.— Vol. 9, Iss. 4.— pp. 641–649.
11. Markov, P.V., Rodionov, S. P. Application of porous media microstructure models when calculating filtration characteristics for hydrodynamic models// Oilfield Engineering.— 2015.— No 11.— P. 64–75.
12. Markov, P.V., Rodionov, S. P. The method of accelerations of serial numerical calculations for multiphase flow equations in porous media using continuous groups of symmetries // Automation, telemechanization and communication in oil industry.— 2015.— No 12.— P. 23–30.
13. Myshkis, A. D. Elements of the theory of mathematical models / A. D. Myshkis.— M.: KomKniga, 2007.— 192 p.
14. Nordhaug, H.F. A pore network model for calculation of interfacial velocities / H. F. Nordhaug, M. Celia, H. K. Dahle. // Advances in Water Resources.— 2003.— Vol. 26.— P. 1061–1074.
15. Oron, A. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau. // Physics Letters A.— 1986.— Vol. 118, Iss. 4.— P. 172–176.
16. Rapoport, L. A. Properties of linear waterfloods / L. A. Rapoport, W. J. Leas. // Journal of Petroleum Technology.— 1953.— Vol. 5, Iss. 5.— P. 139–148.
17. Ryaben'kii, V.S. A Theoretical Introduction to Numerical Analysis / V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov.— 1st ed.— Chapman and Hall/CRC, 2006.— 552 p.
18. Sinha, P. K. Pore-network modeling of liquid water transport in gas diffusion layer of a polymer electrolyte fuel cell / P. K. Sinha, C.-Y. Wang. // Electrochimica Acta.— 2007.— Vol. 52.— P. 7936–7945.
19. Wildenborg, T. Introduction on CO2 Geological Storage. Classification of Storage Options. Oil & Gas Science and Technology / T. Wildenborg, A. Lokhorst. // Rev. IFP.— 2005.— Vol. 60, Iss. 3.— P. 513–515.
20. Winternitz, P. Symmetries of Discrete Systems [Электронный ресурс] / P. Winternitz. // E-print service arXiv.— 2003.— Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/nlin/0309058v1.pdf, свободный.
21. Yiotis, A. G. Pore-Network Modeling of Isothermal Drying in Porous Media / A. G. Yiotis, A. K. Stubos, A. G. Boudouvis, I. N. Tsimpanogiannis, Y. C. Yortsos. // Transport in Porous Media.— 2005.— Vol. 58.— P. 63–86.
22. Zhang, P. Micro/Nano-pore Network Analysis of Gas Flow in Shale Matrix / P. Zhang, L. Hu, J. N. Meegoda, S. Gao. // Sci Rep.— 2015.— Vol. 5.— P. 1–11.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»