DOI 10.37882/2223–2966.2022.11.05

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

TRICOMI-TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN

V. Vagapov

Summary. The existence and uniqueness of a solution to a Tricomi-type boundary value problem for a single mixed-type equation in an unbounded domain in a special class is proved. In the region of ellipticity of the equation, the auxiliary Holmgren problem is solved by the Green's function method, and in the region of hyperbolicity of the equation, a problem of Darboux type. Moreover, to obtain a solution to the Darboux-type problem, first in the characteristic triangle by the method of the Riemann-Hadamard function, first proposed by Professor S.P. Pulkin, the Darboux problem was solved, and then in the constructed solution one of the characteristics was directed to infinity. By sewing together the solutions of these auxiliary problems with respect to the function and the normal derivative on the line of change of the equation type, the Tricomi-type problem is reduced to an equivalent singular integral equation, which is uniquely reduced by the Carleman-Vekua method to a Fredholm integral equation of the second kind, the unconditional solvability of which follows from the corresponding uniqueness theorem for the solution. The uniqueness of the solution of the problem under study is proved using the local extremum principle. Note that the formulation of this problem is based on the well-known works of M.S. Keldysh, I.L. Karolya.

Keywords: tricomi-type problem; unlimited area; Holmgren's problem; Darboux problem; singular integral equation; Carleman-Vekua method.

Вагапов Винер Зуфарович
Кандидат физико-математических наук
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
Стерлитамак
vagapov_vz@rambler.ru

Аннотация. В данной работе в специальном классе доказано существование и единственность решения краевой задачи типа Трикоми для одного уравнения смешанного типа в неограниченной области. В области эллиптичности уравнения методом функции Грина решена вспомогательная задача Хольмгрена, в области гиперболичности уравнения — задача типа Дарбу. Причём, для получения решения задачи типа Дарбу вначале в характеристическом треугольнике методом функции Римана — Адамара, впервые предложенным профессором С.П. Пулькиным, была решена задача Дарбу, а потом в построенном решении одна из характеристик была устремлена в бесконечность. Сшивая решения этих вспомогательных задач по функции и по нормальной производной на линии изменения типа уравнения, задача типа Трикоми сведена к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению, которое методом Карлемана — Векуа однозначно редуцировано к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из соответствующей теоремы единственности решения. Единственность решения исследуемой задачи доказана с помощью принципа локального экстремума. Отметим, что постановка этой задачи исходит из известных работ М.С. Келдыша, И.Л. Кароля.

Ключевые слова: задача типа Трикоми; неограниченная область; задача Хольмгрена; задача Дарбу; сингулярное интегральное уравнение; метод Карлемана-Векуа.

Цель

Работа преследовала цель перенести исследования автора в решении краевых задач для одного уравнения смешанного типа из областей эллиптичности и гиперболичности на случай смешанной области.

Методы

Для построения решения краевой задачи типа Трикоми в области эллиптичности был применён метод построения функции Грина, а в области гиперболичности — метод построения функции Римана — Адамара. Для решения сингулярного интегрального уравнения, полученного после «сшивания» по функции и по нормальной производной решений задачи из областей эллиптичности и гиперболичности уравнения, был использован метод регуляризации Карлемана — Векуа. Единственность решения задачи доказана с помощью принципа локального экстремума.

Результаты

В специальном классе в неограниченной области построено решение краевой задачи типа Трикоми для одного эллиптико — гиперболического уравнения и доказана его единственность.

Выводы

Полученный результат вносит определенный вклад в развитие теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Следует отметить, что задача решена в неограниченной области. Результат был бы, несомненно, ценнее, если бы решение краевой задачи было построено вне специального класса функций.

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{x+y+l}{2}\right)+\tau_-(x-y)-\psi\left(\frac{x-y+l}{2}\right)-$$

$$-|\lambda|\int_{x-y}^{l}\tau_-(t)I_1(|\lambda|\sqrt{(t-x-y)(t-x+y)})\frac{dt}{\sqrt{(t-x-y)(t-x+y)}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\psi\left(\frac{t+l}{2}\right)\sqrt{\frac{l-x+y}{l-x-y}}I_1(|\lambda|\sqrt{(t-x-y)(l-x+y)})dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{l}^{x-y}\psi\left(\frac{t+l}{2}\right)\cdot\left\{\sqrt{\frac{l-x+y}{t-x-y}}I_1(|\lambda|\sqrt{(t-x-y)(l-x+y)})-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{l-x-y}{t-x+y}}I_1(|\lambda|\sqrt{(l-x-y)(t-x+y)})\right\}dt, \qquad (7)$$

Постановка задачи типа Трикоми. Теорема единственности

Рассмотрим уравнение

$$L(u)\equiv u_{xx}+signyu_{yy}-\lambda^2u=0 \qquad (1)$$

в области $D=\{(x;y)|x>0,y>-x\}$.

Обозначим

$D_+=\{(x;y)|y>0\}, D_-=\{(x;y)|y<0\}$,
$\tau_\pm(x)=\lim\limits_{y\to 0\pm}u(x;y), \nu_\pm(x)=\lim\limits_{y\to 0\pm}u_y(x;y)$.

Постановка задачи типа Трикоми (задачи TE)

Найти в области D функцию $u(x;y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$u\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D_+\cup D_-)$ и $L(u)\equiv 0$ в $D_+\cup D_-$; (2)

$\lim\limits_{r\to+\infty}u(x;y)=0, r^2=x^2+y^2,(x;y)\in D_+$; (3)

$u(x;y)_{|x=0}=\varphi(y), y\geq 0$; (4)

$u(x;y)$ ограничена в D_-, (5)

где $\varphi(y)$ — заданная функция.

Отметим, что постановка этой задачи исходит из известных работ М. С. Келдыша [1], И. Л. Кароля [2].

Ранее в работе [3] автором было показано, что если $\varphi(y),\nu_+(x)\in C[0,+\infty)$, $\varphi(y)=e^{-ky}\varphi_0(y)$, где $k\geq 0,|\varphi_0(y)|<c_1$ и $\nu_+(x)=e^{-kx}\nu_0(x)$, где $k\geq 0,|\nu_0(x)|<c_2$, то существует единственное решение задачи Хольмгрена (задачи H) в следующей постановке:

$u(x,y)\in C(\overline{D}_+)\cap C^2(D_+)$;

$Lu(x,y)\equiv 0,(x,y)\in D_+$;

$u(x,y)_{|x=0}=\varphi(y), y\geq 0$;

$u_y(x,y)_{|y=0}=\nu_+(x), x>0$;

$\lim\limits_{r\to+\infty}u(x,y)=0, r^2=x^2+y^2,(x,y)\in D_+$.

Это решение определяется формулой

$$u(x,y)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\frac{\partial G(z,t;x,y)}{\partial z}_{|z=0}dt-$$

$$-\int_0^{+\infty}G(z,0;x,y)\nu_+(z)dz. \qquad (6)$$

Здесь $G(x,y;x_0,y_0)$ — функция Грина задачи H, имеющая вид

$$G(x,y;x_0,y_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[[K_0(|\lambda|r)+K_0(|\lambda|r_1)-K_0(|\lambda|r_2)-K_0(|\lambda|r_3)\right],$$

где $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$,

${r_1}^2=(x-x_0)^2+(y+y_0)^2$,

$r_2{}^2 = (x + x_0)^2 + (y + y_0)^2$,

$M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0) \in D_+$, $K_0(|\lambda| r)$ — функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода [4, с. 13].

В работе [5] автором в характеристическом треугольнике D_l, ограниченном прямыми: $AB: y = 0, 0 < x < l$, $AC: y + x = 0, 0 < x < l/2$, $BC: -y + x = l, l/2 < x < l$, доказано существование и единственность решения задачи Дарбу в следующей постановке:

$u(x, y) \in C(\overline{D}_l) \cap C^2(D_l)$;

$Lu(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D_l$;

$u(x, y)_{|AB} = \tau_-(x), 0 \leq x \leq l$;

$u(x, y)_{|BC} = \psi(x), l/2 \leq x \leq l$;

где $\tau_-(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции и $\tau_-(l) = \psi(l)$. Это решение имеет вид (7), где $I_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [4, с. 13].

Определение. *Будем говорить, что решение $u(x; y)$ уравнения (1) принадлежит классу $B_k(D_-)$, если 1) $u(x; y) \in C(D_-) \cap C^2(D_-)$; 2) $u(x; y) = O\left(e^{-k(x-y)}\right), k > 0$ при $x - y \to +\infty$.*

Опираясь на решение (7) в области D_- решим следующую задачу типа Дарбу (задачу DE).

Задача DE. Найти функцию, удовлетворяющую условиям:

$u \in C(\overline{D}_-) \cap C^2(D_-)$ и $L(u) \equiv 0$ в D_-,

$u(x;y)$ ограничена в D_-,

$u(x, y)_{|y=0} = \tau_-(x), x \geq 0$,

где $\tau_-(x)$ — заданная непрерывная функция в области задания.

Для получения решения задачи DE перейдем в формуле (7) к пределу при $l \to +\infty$. Имеем

$$u(x, y) = \tau_-(x - y) -$$
$$- |\lambda| y \int_{x-y}^{+\infty} \tau_-(t) \frac{I_1\left(|\lambda| \sqrt{(t-x-y)(t-x+y)}\right) dt}{\sqrt{(t-x-y)(t-x+y)}}. \quad (8)$$

Определение. *Будем говорить, что функция $u(x; y) \in R_k(D)$, если $u(x; y) = O(e^{-kx}), k > 0, x \to +\infty$ и в области D_- принадлежит классу $B_k(D_-)$.*

Теорема 1. *Если $\tau_-(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ и при $x \to +\infty$ имеет представление $\tau_-(x) = O(e^{-kx}), k \geq |\lambda|$, то существует единственное решение задачи DE из класса $B_k(D_-)$.*

Для доказательства единственности решения задачи TE предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1 (принцип локального экстремума). *Пусть $\tau_-(x) = e^{-|\lambda| x} \cdot \tau(x)$, $\tau(x) \in M[0; +\infty) \cap C^1[0; +\infty)$. Если $\tau(x)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $\xi, 0 < \xi < +\infty$, то $\nu_-(\xi) = \lim\limits_{y \to 0-} u_y(\xi; y) > 0 \ (< 0)$.*

Доказательство. Учитывая из условия теоремы представление функции $\tau_-(x)$, из формулы (8) находим:

$$\nu_-(x) = -\tau'_-(x) e^{-|\lambda| x} + |\lambda| e^{-|\lambda| x} \tau_-(x) -$$
$$- |\lambda| \tau_-(\xi) \int_x^{+\infty} e^{-|\lambda| t} \frac{I_1\left(|\lambda|(t - x)\right)}{t - x} dt +$$
$$+ |\lambda| \int_x^{+\infty} [\tau_-(\xi) - \tau_-(t)] e^{-|\lambda| t} \frac{I_1\left(|\lambda|(t-x)\right)}{t-x} dt.$$

Учитывая, что $\tau'(\xi) = 0$, для $\nu_-(\xi)$ получим следующее выражение

$$\nu_-(\xi) = |\lambda| \int_\xi^{+\infty} [\tau_-(\xi) - \tau_-(t)] e^{-|\lambda| t} \frac{I_1\left(|\lambda|(t-\xi)\right)}{t-\xi} dt +$$
$$+ |\lambda| e^{-|\lambda| \xi} \tau_-(\xi) [1 - I_1(\xi)],$$

где

$$I_1(\xi) = e^{|\lambda| \xi} \int_\xi^{+\infty} e^{-|\lambda| t} \frac{I_1\left(|\lambda|(t-\xi)\right)}{t-\xi} dt.$$

Из последней формулы видим, что для доказательства леммы достаточно показать, что $I_1(\xi) \leq 1$. С этой целью в интеграле $I_1(\xi)$ следует выполнить замену $t - \xi = s$, использовать представление

$$e^{-|\lambda| s} = K_{\frac{1}{2}}(|\lambda| s) \cdot \sqrt{\frac{2|\lambda| s}{\pi}}$$

(см. формулу (42) из [4, с. 18]) и применить формулу 6.576(5) из [6].

Теперь можно перейти к доказательству единственности решения задачи TE. Пусть $u(x; y)$ — решение задачи (2) — (5) класса $R_k(D)$ с нулевым краевым условием. Предположим, что $u(x; y)$ не равна тождественно нулю в D_+. В силу определения класса $R_k(D)$ функцию $u(x; y)$ можно представить в следующем виде

$$u(x; y) = e^{-|\lambda| x} \cdot v(x; y),$$

где $v(x; y) \to 0$ при $r \to +\infty$, $v(0; y) = 0$ при $y \geq 0$ и в области D_+ удовлетворяет уравнению

$$v_{xx}+v_{yy}-2|\lambda|v_x=0.$$

Для этого уравнения имеет место внутренний принцип экстремума Хопфа [7, с. 25]. Тогда в силу приведенных выше условий $v(x;y)\neq const$ тождественно достигает своего положительного максимума в области $\overline{D}_+$ лишь в точке $(\xi;0), 0<\xi<+\infty$. В этой точке в силу принципа Заремба — Жиро [8, с. 31] имеем, что $v_y(\xi;0+0)<0$. Следовательно, и

$$u_y(\xi;0+0)=e^{-|\lambda|\xi}v_y(\xi;0+0)=\nu_+(\xi)<0.$$

Последнее, в силу доказанной выше леммы, противоречит условию сопряжения $\nu_+(x)=\nu_-(x)$. Следовательно, $u(x;y)=0$ тождественно в D_+ и, стало быть, в D.

Доказательство существования решения задачи TE.

Полагая в формуле решения задачи Хольмгрена (6) $y=0$, находим

$$\tau_+(x)=A(x)-\int_0^{+\infty}\nu_+(t)H(x;t)dt, \qquad (9)$$

где

$$A(x)=\frac{2|\lambda|x}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\frac{K_1(|\lambda|\sqrt{x^2+t^2})}{\sqrt{x^2+t^2}}dt, \qquad (10)$$

$$H(x;t)=\frac{1}{\pi}\left[K_0(|\lambda||t-x|)-K_0(|\lambda|(t+x))\right].$$

Из формулы решения задачи DE (8) находим

$$\nu_-(x)=-\tau'_-(x)-|\lambda|\int_x^{+\infty}\tau_-(t)\frac{I_1(|\lambda|(t-x))}{t-x}dt. \qquad (11)$$

Исключая из уравнений (9) и (11) функцию $\tau_+(x)$, получим уравнение относительно функции $\nu(x)$:

$$\nu(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\nu(t)\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)dt=F(x)=f(x)+\int_0^{+\infty}\nu(t)K(x,t)dt, \qquad (12)$$

где

$$K(x,t)=Q_1(x,t)+Q_2(x,t), \qquad (13)$$

$$Q_1(x,t)=\int_x^{+\infty}q(x,z)H(z,t)dz,$$

$$q(x,t)=\frac{I_1(|\lambda|(t-x))}{t-x},$$

$$Q_2(x,t)=\frac{|\lambda|}{\pi}\left[\widetilde{K}_1(|\lambda|(t+x))+\widetilde{K}_1(|\lambda||t-x|)sgn(t-x)\right],$$

$$\widetilde{K}_1(z)=K_1(z)-\frac{1}{z}=$$

$$=I_1(z)ln\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}\frac{\psi(k+1)+\psi(k+2)}{k!(k+1)!},$$

$$\psi(z)=\frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)},$$

$$f(x)=-A'(x)-|\lambda|\int_x^{+\infty}A(t)q(t,x)dt.$$

Исследуем функцию $K(x,t)$ при $0\le x,t<+\infty$. Нетрудно видеть, что функция $H(x,t)$ при $t\to x\in[0;+\infty)$ имеет особенность логарифмического порядка, т.к. функция Макдональда $K_0(z)$ при $z\to 0$ имеет особенность логарифмического порядка.

Далее, в интеграле в ядре

$$Q_1(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_x^{+\infty}\frac{I_1(|\lambda|(z-x))}{z-x}[K_0(|\lambda||t-z|)-$$

$$-K_0(|\lambda|(t+z))]dz$$

выполним замену переменных $z-x=s$. Получим

$$Q_1(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}s^{-1}\cdot I_1(|\lambda|s)\cdot[K_0(|\lambda||t-x-s|)-$$

$$-K_0(|\lambda|(t+x+s))]dz.$$

Отсюда следует, что функция $Q_1(x,t)$ непрерывна при $0\le x,t<+\infty$. Итак, из вышеприведённых рассуждений и формулы (13) следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Для функции $K(x,t)$ при $0\le x,t<+\infty$ справедлива оценка $|K(x,t)|<c_1 ln|t-x|$.*

Теперь рассмотрим функцию $A(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$.

Лемма 3. *Если $\varphi(y)\in C[0;+\infty)\cap M[0;+\infty)$, то $A(x)\in C[0;+\infty)\cap C^{(\infty)}(0;+\infty)$ и справедлива оценка $|A(x)|\le c_2e^{-|\lambda|x}$.*

Доказательство. Оценивая функцию (10) при $0<x<+\infty$, имеем

$$|A(x)|<||\varphi||\frac{2|\lambda|x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{K_1(|\lambda|\sqrt{x^2+t^2})}{\sqrt{x^2+t^2}}dt.$$

Вычислив последний интеграл по формуле Сонина – Гегенбауэра 6.596(3) [6, с. 719], получим нужную оценку для $A(x)$. Тот факт, что $A(x)\in C^{(\infty)}(0;+\infty)$, очевидным образом следует из явного вида функции $A(x)$.

Лемма 4. *Если $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям леммы 3 и $\varphi(0)=0$, $\varphi(y)\in H_{\lambda_0}[0;\delta]$, $0<\lambda_0\le 1$, то при $x\to 0$*

$$A'(x)=\begin{cases}c_3x^{\lambda_0-1}, \text{при } 0<\lambda_0<1;\\ c_4lnx, \text{ при } \lambda_0=1\,;\end{cases}$$

при $x\to+\infty$: $|A'(x)|=O\left(c_5e^{-|\lambda|x}\right)$.

Доказательство. Вначале вычислим производную

$$A'(x) = \frac{2|\lambda|}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\frac{K_1\left(|\lambda|\sqrt{x^2+t^2}\right)}{\sqrt{x^2+t^2}}dt -$$
$$-\frac{2\lambda^2x^2}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\frac{K_2\left(|\lambda|\sqrt{x^2+t^2}\right)}{x^2+t^2}dt. \quad (14)$$

Оценим функцию $A'(x)$ при $x \to +\infty$:

$$|A'(x)| < ||\varphi||\frac{2|\lambda|}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{K_1(|\lambda|\sqrt{x^2+t^2})}{\sqrt{x^2+t^2}}dt +$$
$$+\frac{2\lambda^2x^2}{\pi}||\varphi||\int_0^{+\infty}\frac{K_2\left(|\lambda|\sqrt{x^2+t^2}\right)}{x^2+t^2}dt.$$

Вычисляя последние интегралы вновь по формуле Сонина –Гегенбауэра 6.596(3) [2, с. 719], получаем отсюда при $x \to +\infty$: $|A'(x)| = O\left(c_5e^{-|\lambda|x}\right)$.

Теперь исследуем поведение функции $A'(x)$ при $x \to 0$. По условию леммы функцию $\varphi(y)$ можно представить в виде $\varphi(y) = y^{\lambda_0}\bar{\varphi}(y), \bar{\varphi}(y) \in M[0;\delta]$. Принимая во внимание это представление, разобьём каждый из интегралов, входящих в правую часть (14), на два: при $0 \le t \le \delta$ и при $\delta \le t < +\infty$. Нетрудно видеть, что при фиксированном δ интегралы по промежутку [$\delta; +\infty$) сходятся при любом $x \in [0;+\infty)$. Далее, учитывая, что при $z \to 0$: $K_\nu(z) = o(z^{-|\nu|})$, оценим $A'(x)$ при $x \to 0$:

$$|A'(x)| < c_6 + c_7\int_0^{\delta}\frac{t^{\lambda_0}}{x^2+t^2}dt + c_8\int_0^{\delta}\frac{t^{\lambda_0}x}{(x^2+t^2)^2}dt \le c_9\int_0^{\delta}\frac{t^{\lambda_0}}{x^2+t^2}dt.$$

После замены переменных $t = sx$ получим требуемые оценки. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию

$$i(x) = |\lambda|\int_0^{+\infty}A(t)q(t,x)dt = |\lambda|\int_0^{+\infty}A(x+s)I_1(|\lambda|s)s^{-1}ds.$$

Отсюда, учитывая оценку $|A(x)| \le c_2e^{-|\lambda|x}$ из леммы 3, получим

$$|i(x)| \le c_{10}e^{-|\lambda|x}. \quad (15)$$

Лемма 5. *Если функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям леммы 4, то $f(x) \in C^1[0;+\infty) \cap C^{(\infty)}(0;+\infty)$ и при $x \to 0$:*

$$f(x) = \begin{cases} o\left(x^{\lambda_0-1}\right), \text{при } 0 < \lambda_0 < 1; \\ o(lnx), \text{при } \lambda_0 = 1; \end{cases}$$

при $x \to +\infty$: $f(x) = O\left(e^{-|\lambda|x}\right)$.

Доказательство леммы 5 непосредственно следует из лемм 3, 4 и полученной выше оценки (15).

Итак, на основании выше доказанных лемм 2–5 можно приступить к решению интегрального уравнения (12). Но прежде уравнение (12) заменой

$$x^2 = \frac{y}{1-y}, t^2 = \frac{\tau}{1-\tau},$$

$$\mu(y) = \nu(x)(1+x^2),$$

$$F(y) = F(x)(1+x^2)$$

сводим к сингулярному интегральному уравнению

$$\mu(y) - \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\mu(\tau)}{\tau-y}d\tau = \tilde{F}(y), \quad (16)$$

$$\tilde{F}(y) = \tilde{f}(y) + \int_0^1\mu(\tau)\tilde{K}(y,\tau)d\tau,$$

$$\tilde{f}(y) = (1+x^2)f(x),$$

$$\tilde{K}(y,\tau) = \frac{1}{2}(1+x^2)K(x,t)[\tau(1-\tau)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, задача ТЕ приведена к эквивалентному сингулярному интегральном уравнению, решение которого будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера внутри интервала $(0;1)$, ограниченных в точке 0 и неограниченных на другом конце этого интервала.

Для этого известным методом Карлемана — Векуа [9, с. 203] произведём регуляризацию уравнения (16) в вышеуказанном классе функций. В результате этого придём к уравнению

$$\mu(y) - \frac{1}{2}\int_0^1K_1(y,\tau)\mu(\tau)d\tau = \tilde{f}_1(y), \quad (17)$$

$$K_1(y,\tau) = \tilde{K}(y,\tau) + \frac{1}{\pi}\sqrt[4]{\frac{1-y}{y}}\int_0^1\sqrt[4]{\frac{\tau_1}{1-\tau_1}}\frac{\tilde{K}(\tau_1,\tau)}{\tau_1-y}d\tau_1, \quad (18)$$

$$\tilde{f}_1(y) = \frac{1}{2}\tilde{f}(y) + \frac{1}{2\pi}\sqrt[4]{\frac{1-y}{y}}\int_0^1\tilde{f}(\tau)\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}\frac{d\tau}{\tau-y}. \quad (19)$$

Если $\lambda_0 > \frac{1}{2}$ (см. лемму 4),

то в силу лемм 2, 5 и [9] следует, что уравнение (17) есть уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из доказательства единственности решения задачи ТЕ, и его решение представимо в виде

$$\mu(y) = y^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-k\cdot\sqrt{\frac{y}{1-y}}} \cdot \mu_0(y), \quad (20)$$

где $\mu_0(y) \in C[0;1]$. Дифференцируемость функции $\mu(y)$ при $0 < y < 1$ проверяется интегрированием по частям в формулах (18) и (19). Учитывая, что $\mu(y) = \nu(x)(1+x^2)$, из (20) находим

$$\nu(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-kx} \cdot \nu_0(x), \ \nu_0(x) \in C[0;+\infty).$$

После нахождения функции $\nu(x)$ нетрудно найти функцию $\tau_+(x)$, и она определяется формулой (9).

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $k = |\lambda|$ *и функция* $\varphi(y) \in C[0,+\infty)$, $\varphi(y) = e^{-ky}\varphi_0(y)$, *где* $k \geq 0, |\varphi_0(y)| < c_1$, *удовлетворяет условиям леммы 4*

и $\lambda_0 > \frac{1}{2}$,

то существует единственное решение задачи (2) — (5) в классе $R_{|\lambda|}(D)$, *и оно определяется в областях* D_+ *и* D_- *соответственно формулами (6) и (8).*

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. Кароль И.Л. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико — гиперболического типа // Матем. сб. 1956. Т. 38 (80). № 3. С. 261–283.
3. Вагапов В.З. Задача Хольмгрена для одного уравнения эллиптического типа в неограниченной области. Сборник статей X Международной научно-практической конференции «Научные исследования и инновации» (27 июля 2021 г., Саратов). — Саратов: НОО «Цифровая наука». — 2021. — С. 8–12.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. — 1966. — 295с.
5. Вагапов В.З. Задача Дарбу для одного уравнения гиперболического типа в характеристическом треугольнике. Сборник материалов IV Международной научно-практической конференции «Вызовы современности и стратегии развития общества в условиях новой реальности» (20 августа 2021 г., Москва). — М: ООО «Ирок» 2015. — 2021. — С. 164–168.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 1232 с.
7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. — 448 с.
8. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: наука, 1966. — 202 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»